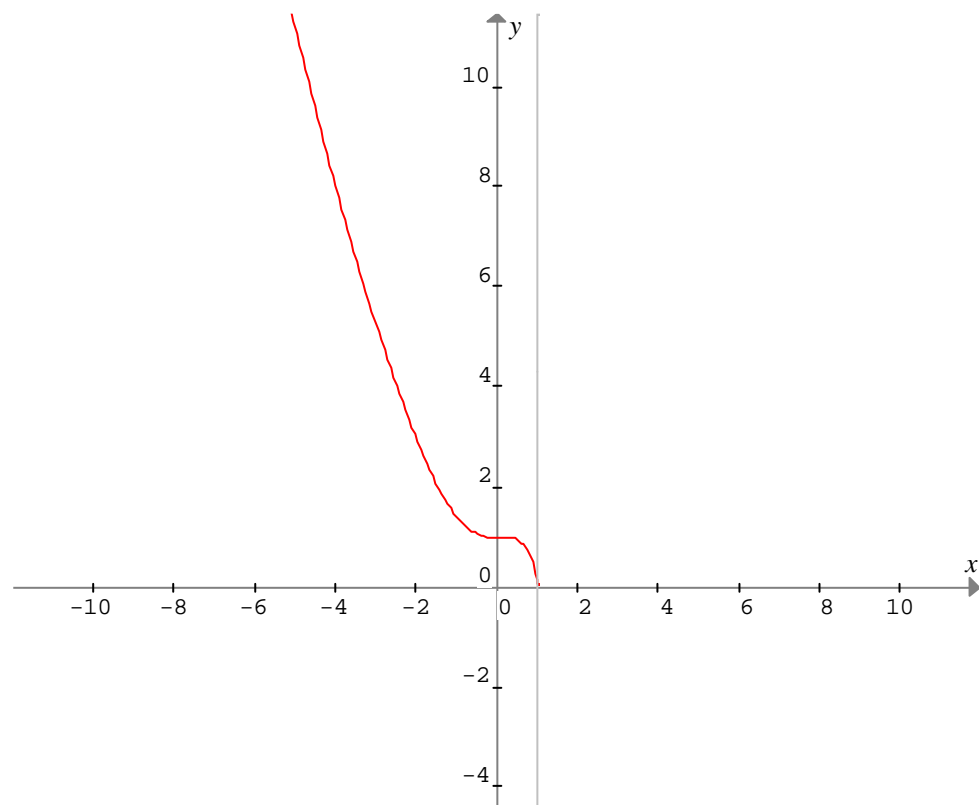


STUDIO DI FUNZIONE: irrazionale intera

$y = f(x)$	$y = \sqrt{1-x^3}$
Simmetrie	Non ci sono simmetrie
Campo di Esistenza	$CDE = \{\forall x \in (-\infty, 1]\}$
Eventuali intersezioni con gli assi coordinati	intersezione con l'asse x : $(1,0)$ intersezione con l'asse y : $(0,1)$
segno della funzione	la funzione è positiva in : $x < 1$
comportamento agli estremi del dominio	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-x^3} = +\infty$
eventuali asintoti	asintoti verticali: nessuno asintoti orizzontali: nessuno asintoti obliqui: nessuno
derivate	$y' = \frac{-3x^2}{2\sqrt{1-x^3}} \quad ; \quad y'' = \frac{3}{4} \frac{x^4 - 4x}{(1-x^3)\sqrt{1-x^3}}$
monotonia	la funzione è sempre decrescente in tutto il suo dominio
eventuali massimi e minimi relativi	minimo : nessuno massimo : nessuno
concavità e convessità	la funzione presenta la concavità verso l'alto in : $-\infty < x < 0$ la funzione presenta la concavità verso il basso in : $0 < x < 1$
eventuali punti di flesso	punto di flesso discendente : $(0,1)$
eventuali punti di non derivabilità	il punto di coordinate $(1,0)$ è un punto di non derivabilità (flesso a tangente verticale)
grafico	

STUDIO DI FUNZIONE: irrazionale intera

$$y = \sqrt{1-x^3}$$

Simmetrie

$f(-x) = \sqrt{1-(-x)^3} = \sqrt{1+x^3}$. Poiché $f(x) \neq f(-x)$ non ci sono simmetrie rispetto all'asse y ;

inoltre poiché $-f(x) \neq f(-x)$ non ci sono simmetrie rispetto all'origine.

Campo di Esistenza

$y = \sqrt{1-x^3}$ è una funzione irrazionale intera, perciò basterà imporre che il radicando non sia negativo:

$1-x^3 \geq 0$. Risolviamo la disequazione scomponendo il prodotto notevole: $(1-x)(1+x+x^2) \geq 0$, il secondo fattore è

sempre positivo, quindi: $(1-x) \geq 0$, $x \leq 1$

Il CDE della funzione è allora costituito dall'intervallo:

$$\text{CDE} = \{ \forall x \in (-\infty, 1] \}$$

Intersezioni con gli assi coordinati

Intersezione con l'asse x :

$$\begin{cases} y = \sqrt{1-x^3} \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} \sqrt{1-x^3} = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} 1-x^3 = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x^3 = 1 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Il punto in cui la curva interseca l'asse x è: $(1,0)$

Intersezione con l'asse y :

$$\begin{cases} y = \sqrt{1-x^3} \\ x = 0 \end{cases}, \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Il punto in cui la curva interseca l'asse y è: $(0,1)$

Segno della funzione

Studiamo in quali intervalli la funzione è positiva, ovvero in quali regioni del CDE la funzione si dispone sopra l'asse delle ascisse:

$$\sqrt{1-x^3} > 0, 1-x^3 > 0, x^3 < 1, x < 1$$

La funzione risulta positiva per valori $x < 1$.

Studio del comportamento della funzione agli estremi del dominio attraverso il calcolo dei limiti.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-x^3} = +\infty$$

Asintoti verticali

Dall'esame del CDE e dal calcolo dei limiti che tendono ad ∞ si desume che non ci sono asintoti verticali.

Asintoti orizzontali

Dal calcolo del limite $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1-x^3} = \infty$, si deduce che non ci sono asintoti orizzontali per la curva.

Calcolo delle derivate

$y' = \frac{-3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}$; il CDE della derivata prima è $(-\infty, 1)$. Nel punto di ascissa $x = 1$, la derivata prima non esiste, quindi il

punto è di *non derivabilità*. Studieremo più avanti di che tipo.

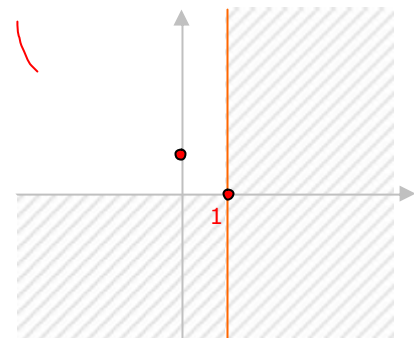
$$y'' = -\frac{3}{2} \left[\frac{2x\sqrt{1-x^3} - x^3 \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} (-3x^2)}{1-x^3} \right] = -\frac{3}{2} \left[\frac{4x(1-x^3) + 3x^4}{(1-x^3)\sqrt{1-x^3}} \right] = -\frac{3}{4} \frac{4x-x^4}{(1-x^3)\sqrt{1-x^3}} = \frac{3}{4} \frac{x^4-4x}{(1-x^3)\sqrt{1-x^3}}$$

Ricerca di eventuali punti di massimo o minimo relativi

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{-3x^2}{2\sqrt{1-x^3}} = 0, -3x^2 = 0, x = 0$$

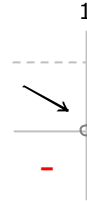
Nel punto di ascissa $x = 0$ esiste un probabile massimo o minimo, o un flesso.

Per saperne di più studiamo la monotonia della funzione.



Studio della monotonia

$$y' > 0 \Rightarrow \frac{-3x^2}{2\sqrt{1-x^3}} > 0 \quad \begin{array}{l} N > 0 \quad -3x^2 > 0 \quad x^2 < 0 \quad \text{mai verificato} \\ D > 0 \quad 2\sqrt{1-x^3} > 0 \quad 1-x^3 > 0 \quad x < 1 \end{array}$$



quindi la funzione è sempre decrescente per valori $x < 1$, ovvero in tutto il suo Campo di Esistenza. Questo assicura che non esiste un punto di minimo relativo per la funzione.

Ricerca di eventuali punti di flesso

$$y'' = 0 \Rightarrow \frac{3}{4} \frac{x^4 - 4x}{(1-x^3)\sqrt{1-x^3}} = 0, \quad x^4 - 4x = 0, \quad x(x^3 - 4) = 0, \quad x = 0 \quad e \quad x = \sqrt[3]{4} (\cong 1,58) \text{ sono le due}$$

soluzioni. La seconda, maggiore di 1, esula dal CDE. L'ascissa del probabile punto di flesso è $x = 0$.

Studio della concavità

$$y'' > 0 \Rightarrow \frac{3}{4} \frac{x^4 - 4x}{(1-x^3)\sqrt{1-x^3}} > 0$$

esaminiamo i fattori che compongono la derivata seconda: $\frac{3}{4}$ è sempre positivo, $(1-x^3)$ è sempre positivo, $\sqrt{1-x^3}$ è

sempre positivo. Quindi studiamo solo il segno del fattore $x^4 - 4x$;

$$y'' > 0 \Rightarrow x^4 - 4x > 0, \quad x(x^3 - 4) > 0$$

$$F_1 > 0 \Rightarrow x > 0$$

$$F_2 > 0 \Rightarrow x^3 - 4 > 0, \quad x^3 > 4, \quad x > \sqrt[3]{4} (\cong 1,58)$$

La curva quindi presenta la concavità verso l'alto in : $-\infty < x < 0$,

mentre presenta la concavità verso il basso in : $0 < x < 1$.

Il punto di ascissa 0 è un punto di flesso a tangente orizzontale.

Calcoliamo ora le ordinate del punto di flesso sostituendo il valore ottenuto nella funzione:

$$y = \sqrt{1-0} = 1.$$

Per cui il punto di coordinate $(0,1)$ è un flesso discendente.

Studio dei punti di non derivabilità

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x^3} - 0}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{(1-x)(1+x+x^2)}{(1-x)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{(1+x+x^2)}{(1-x)}} = +\infty,$$

allora nel punto di ascissa $x = 1$ c'è un flesso a tangente verticale, la cui ordinata è $y = 0$.

