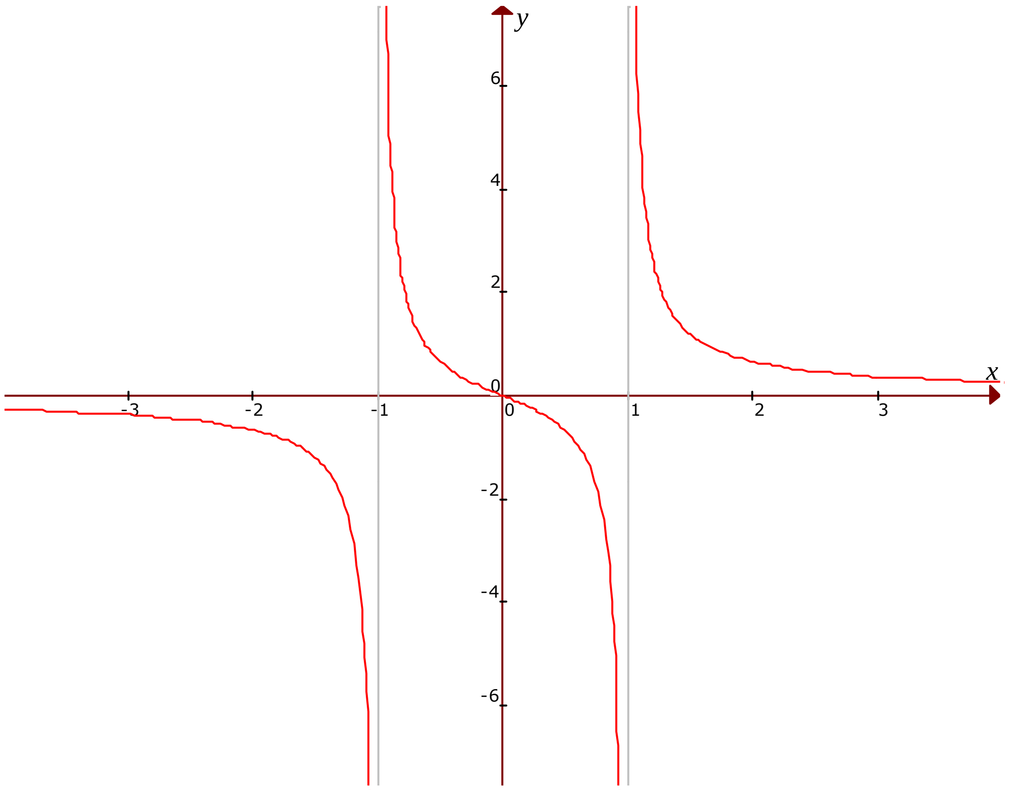
STUDIO DI FUNZIONE: razionale frazionaria

$y = f(x)$	$y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$
Simmetrie	la curva è simmetrica rispetto all'origine
Campo di Esistenza	$\text{CDE} = \{\forall x \in (-\infty,-1) \cup (-1,+1) \cup (+1,+\infty)\}$
Eventuali intersezioni con gli assi coordinati	intersezione con l'asse x : $(0,0)$ intersezione con l'asse y : $(0,0)$
segno della funzione	la funzione è positiva in : $-1 < x < 0$, $x > 1$
comportamento agli estremi del dominio	$\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2-1} = 0^-$; $\lim_{x\to-1^-} \dfrac{x}{x^2-1} = -\infty$; $\lim_{x\to-1^+} \dfrac{x}{x^2-1} = +\infty$; $\lim_{x\to1^-} \dfrac{x}{x^2-1} = -\infty$; $\lim_{x\to1^+} \dfrac{x}{x^2-1} = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2-1} = 0^+$
eventuali asintoti	asintoti verticali: $x = -1$, $x = 1$ asintoti orizzontali: $y = 0$ asintoti obliqui: nessuno
derivate	$y' = -\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$; $y'' = \dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$
monotonia	la funzione è decrescente : sempre (in tutto il suo CDE) la funzione è crescente : mai
eventuali massimi e minimi relativi	minimo : nessuno massimo : nessuno
concavità e convessità	la funzione presenta la concavità verso l'alto in : $-1 < x < 0$, $x > 1$ la funzione presenta la concavità verso il basso in : $x < -1$, $0 < x < 1$
eventuali punti di flesso	punto di flesso discendente : $(0,0)$
grafico	

STUDIO DI FUNZIONE: razionale frazionaria

$$y=\frac{x}{x^2-1}$$

Simmetrie

$f(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2-1}=-\dfrac{x}{x^2-1}$. Poiché $-f(x)=f(-x)$ la funzione è dispari ovvero la curva è simmetrica rispetto all'origine.

Campo di Esistenza

$y=\dfrac{x}{x^2-1}$ è una funzione razionale fratta, perciò basterà imporre che il denominatore non sia nullo:

$x^2-1\neq 0 \Rightarrow x^2\neq 1 \Rightarrow x\neq \pm 1$.

Questo si verifica sempre nel campo dei numeri Reali, quindi il CDE della funzione è costituito dall'unione degli intervalli:

$\mathrm{CDE}=\{\forall x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+1)\cup(+1,+\infty)\}$.

Intersezioni con gli assi coordinati

Intersezione con l'asse x:

$$\begin{cases} y=\dfrac{x}{x^2-1} \\ y=0 \end{cases},\quad \begin{cases} \dfrac{x}{x^2-1}=0 \\ y=0 \end{cases},\quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

il punto in cui la curva interseca l'asse x è: $(0,0)$

Intersezione con l'asse y:

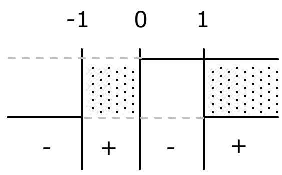
$$\begin{cases} y=\dfrac{x}{x^2-1} \\ x=0 \end{cases},\quad \begin{cases} y=\dfrac{0}{0-1} \\ x=0 \end{cases},\quad \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$$

Il punto in cui la curva interseca l'asse y è : $(0,0)$

Segno della funzione

Studiamo in quali intervalli la funzione è positiva, ovvero in quali regioni del CDE la funzione si dispone sopra l'asse delle ascisse:

$$\frac{x}{x^2-1}>0,\quad \begin{array}{lllll} \mathrm{N}>0 & x>0 & & & \\ \mathrm{D}>0 & x^2-1>0 & x^2>1 & x<-1, & x>1 \end{array}$$



La funzione risulta positiva per valori $-1<x<0$, $x>1$.

Studio coi limiti del comportamento della funzione agli estremi del dominio.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-1}=\frac{\infty}{\infty},$$

La funzione, quando x tende a $-\infty$, tende al valore 0^-, infatti confrontando gli ordini di infinito del numeratore e del denominatore, si vede che l'ordine di infinito del denominatore è superiore a quello del numeratore..

In altro modo, la forma di indeterminazione si può eliminare raccogliendo al numeratore e al denominatore la stessa quantità; si ottiene:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\dfrac{1}{x}},$$

semplificando per x e notando che il $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0^-$, si ottiene infine:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-1}=0^-.$$

In modo analogo si procede per l'altro limite; ricordando che $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0^+$, si ottiene:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-1}=0^+.$$

Osservazione. La curva ha nella retta di equazione $y=0$ un asintoto orizzontale.

Calcoliamo ora gli altri limiti:

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x}{x^2-1}=\frac{-1^-}{\left(-1^-\right)^2-1}=\frac{-1}{1^+-1}=\frac{-1}{0^+}=-\infty \quad ;$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x}{x^2-1}=\frac{-1^+}{\left(-1^+\right)^2-1}=\frac{-1}{1^--1}=\frac{-1}{0^-}=+\infty \quad ;$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{x^2-1}=\frac{1^-}{\left(1^-\right)^2-1}=\frac{1}{1^--1}=\frac{1}{0^-}=-\infty \ ;$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x^2-1}=\frac{1^+}{\left(1^+\right)^2-1}=\frac{1}{1^+-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty \ .$$

Asintoti verticali

Dall’esame del CDE o dal calcolo dei limiti che tendono ad ∞:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x}{x^2-1}=\infty \ \text{ e } \ \lim_{x\to 1}\frac{x}{x^2-1}=\infty ,$$

si deduce che la funzione possiede due asintoti verticali di equazione $x=-1$ e $x=1$.

Asintoti orizzontali

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{x^2-1}=0^- \ \text{ e } \ \lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x^2-1}=0^+ ,$$

si deduce che la funzione possiede un asintoto orizzontale di equazione $y=0$.

Calcolo delle derivate

$$y'=\frac{1\left(x^2-1\right)-x(2x)}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x^2-1-2x^2}{\left(x^2-1\right)^2}=-\frac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2} \ ;$$

$$y''=-\frac{2x\left(x^2-1\right)^2-\left(x^2+1\right)2\left(x^2-1\right)(2x)}{\left(x^2-1\right)^4}=-\frac{2x\left(x^2-1\right)\left(x^2-1-2x^2-2\right)}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$$

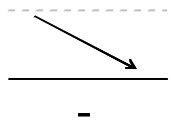
Ricerca di eventuali punti di massimo o minimo relativi

$$y'=0 \ \Rightarrow \ -\frac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}=0 \ , \quad x^2+1=0 \ \Rightarrow \text{mai vero} \ .$$

Non esistono punti di massimo o minimo.

Studio della monotonia

$$y'>0 \ \Rightarrow \ -\frac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}>0 \qquad \begin{array}{llll} N>0 & -\left(x^2+1\right)>0 & x^2+1<0 & \text{mai vero} \\ D>0 & \left(x^2-1\right)^2>0 & \text{sempre vero} & \text{sempre vero} \end{array}$$



quindi la curva risulta sempre decrescente per qualsiasi valore di x nel CDE.
Questo conferma che non esistono punti di massimo o di minimo per la funzione.

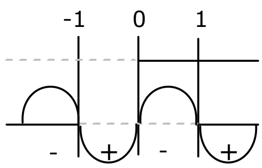
Ricerca di eventuali punti di flesso

$$y''=0 \ \Rightarrow \ \frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}=0 \quad , \quad 2x=0 \quad , \quad x=0$$, in quanto il fattore $\left(x^2+3\right)$ non si annulla mai.

L’ascissa del probabile punto di flesso è $x=0$.

Studio della concavità

$$y''>0 \ \Rightarrow \ \frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}>0 \qquad \begin{array}{lllll} N>0 & 2x>0 & x>0 , & & \\ D>0 & \left(x^2-1\right)^3>0 & x^2-1>0 & x^2>1 & x<-1 , \ x>1 \end{array}$$



Si noti che il fattore $\left(x^2+3\right)$ è sempre strettamente positivo.

La curva quindi presenta la concavità verso l’alto in : $-1<x<0$, $x>1$

mentre presenta la concavità verso il basso in : $x<-1$, $0<x<1$.

I punti di ascissa –1 e +1 che non appartengono al CDE della funzione, non sono da considerarsi come flessi, anche se la curva in tali punti cambia la sua concavità.

Calcoliamo ora le ordinate del punto di flesso sostituendo il valore ottenuto nella funzione:

$$y = \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{0}{0-1} = 0\,.$$

Per cui il punto di coordinate $(0,0)$ è un flesso discendente.