

Elementi di calcolo vettoriale

Nozione di vettore. Grandezze vettoriali e grandezze scalari

Segmenti orientati e vettori

Definizioni

Operazioni con i vettori

Somma e differenza di vettori

Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

Scomposizione di un vettore lungo due direzioni assegnate

Componenti cartesiane di un vettore

Prodotto scalare di due vettori

Prodotto vettoriale di due vettori

Prodotto misto di tre vettori

Doppio prodotto vettoriale

ELEMENTI DI CALCOLO VETTORIALE

Nozione di vettore. Grandezze vettoriali e grandezze scalari

Il concetto di **vettore** trova la sua origine nell'ambito della Fisica in quanto in essa la descrizione basata solo su grandezze elementari quali per esempio il tempo, la massa, la temperatura, il volume, si dimostra ben presto inadeguata alla rappresentazione degli oggetti e delle loro relazioni.

Le grandezze fisiche si distinguono essenzialmente in due grandi classi. Quelle che risultano completamente definite quando se ne conosce la sola misura rientrano nella categoria delle **grandezze scalari** le altre richiedono di norma un maggior contenuto informativo e vengono rappresentate dalle **grandezze vettoriali**.

Nella prima categoria rientrano grandezze come la lunghezza, l'area, il volume, il tempo, la temperatura, la pressione, il calore specifico, l'energia ..., e per queste è sufficiente fornire la loro grandezza relativamente ad una opportuna unità di misura: esempi tipici delle grandezze vettoriali sono invece lo spostamento, la velocità, l'accelerazione, la forza, l'impulso, ...

Segmenti orientati e vettori

Scelta un'unità di misura, ad ogni segmento \overline{AB} si può associare un numero reale non negativo AB .

Sia AB la misura della lunghezza del segmento \overline{AB} .

Definiamo un segmento orientato come quel segmento di estremi A e B nel quale si sia assegnato un ordine e quindi si possa distinguere un punto iniziale ed uno finale. A tal fine si sceglie il simbolo \overrightarrow{AB} convenendo di considerare A come il punto iniziale e B come quello finale. Graficamente ciò si esprime tramite una freccia che parte da A e giunge in B .

Il simbolo \overrightarrow{BA} individua il segmento orientato di verso opposto ad \overrightarrow{AB} e si pone $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. Nota che la misura della lunghezza di entrambi è ancora la medesima, $AB = BA$, e risulta un numero positivo se $A \neq B$, mentre è nulla se $A = B$. In tal caso il segmento orientato \overrightarrow{AA} è detto il segmento orientato nullo.

La lunghezza del segmento orientato si dice *norma*, in fisica *intensità* o *modulo*.

Definizioni

Un *vettore* nel piano (o nello spazio) è un ente geometrico caratterizzato da una *direzione*, un *verso* e un'*intensità* (*modulo*).

Per denotare un vettore utilizziamo il simbolo \vec{u} , mentre usiamo la notazione \overrightarrow{AB} per individuare i segmenti orientati rappresentativi del vettore. Per esempio, se due vettori \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} possiedono la medesima direzione, verso e lunghezza allora sono rappresentativi dello stesso vettore, e si può scrivere $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Indichiamo con $|\vec{u}|$ il modulo o norma del vettore \vec{u} .

Due vettori si dicono:

equipollenti quando hanno la stessa direzione, lo stesso verso e uguale modulo;

concordi se hanno stessa direzione e stesso verso;

discordi quando hanno stessa direzione e verso contrario;

opposti se hanno uguale intensità e sono discordi.

I punti A e B si chiamano rispettivamente *origine* ed *estremo* del vettore.

Se il punto A è fisso il *vettore* si dice *applicato* in A , se invece A è un qualunque punto della retta r , sostegno di \vec{u} , il vettore si dice applicato ad r . Se non è applicato si dice *libero*.

Operazioni con i vettori

Dati due vettori \vec{u} e \vec{v} possiamo definire delle operazioni tra essi in modo da associare a ciascuna coppia un altro vettore.

Somma e differenza di vettori

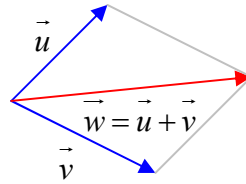
Regola del triangolo. Il vettore **somma** (o *vettore risultante*) \vec{w} di due vettori \vec{u} e \vec{v} si determina graficamente applicando nell'estremo di \vec{u} , mediante una traslazione, il vettore \vec{v} .

Il vettore \vec{w} che unisce l'origine di \vec{u} con l'estremo di \vec{v} fornisce la somma $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

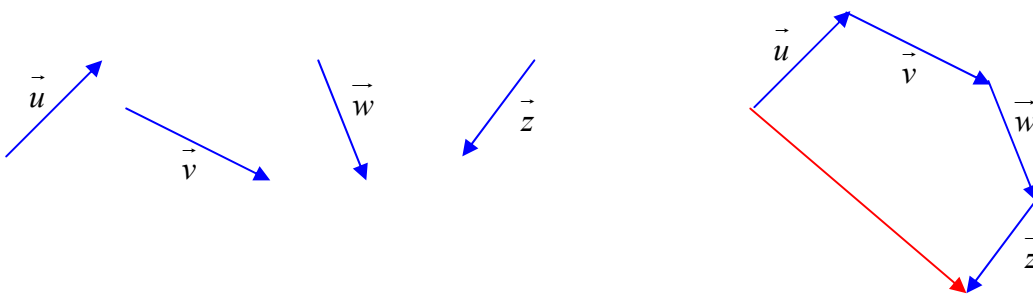


Regola del parallelogramma. Un altro metodo consiste nella *regola del parallelogramma*: il vettore risultante $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ è rappresentato dalla diagonale del parallelogramma costruito per

mezzo dei segmenti orientati rappresentativi dei due vettori e disposti in modo da avere l'origine in comune.



Regola del poligono. Nel caso in cui i vettori siano numerosi si può utilizzare la *regola del poligono (metodo punta e coda)*. Consiste nel trascinare i diversi vettori in modo che l'origine di ognuno coincida con l'estremo del precedente. Il vettore risultante si ottiene quindi unendo l'origine del primo con l'estremo dell'ultimo.



Proprietà:

Commutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

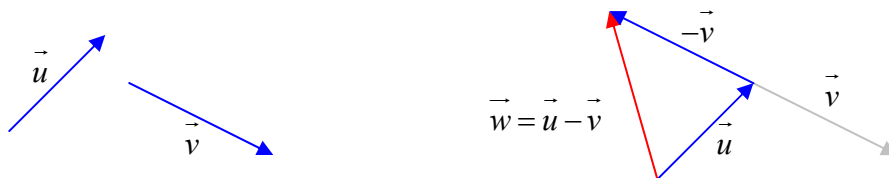
Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

Elemento neutro: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

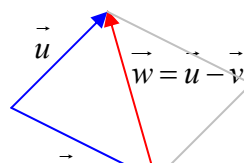
Per determinare il vettore **differenza** basta sommare ad \vec{u} l'opposto di \vec{v} : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

Osserviamo che per la differenza di vettori non vale la proprietà commutativa, infatti:

$$\vec{u} - \vec{v} = -(\vec{v} - \vec{u}).$$



Utilizzando la regola del parallelogramma si può notare che la lunghezza della diagonale uscente dall'origine comune esprime la lunghezza di $\vec{u} + \vec{v}$ mentre la lunghezza dell'altra diagonale è pari alla lunghezza del vettore $\vec{u} - \vec{v}$.

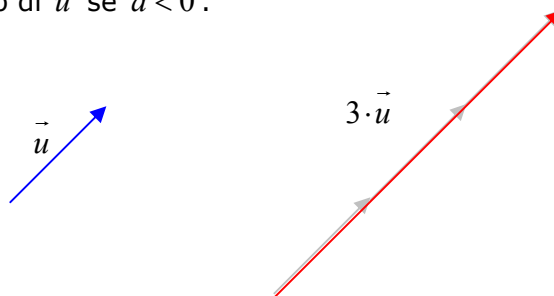


Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

Dato uno scalare a (numero reale) e un vettore \vec{u} è possibile definire una nuova operazione tale da associare a questi due un altro vettore.

Se moltiplichiamo un numero reale a per un vettore \vec{u} otteniamo un vettore che ha come modulo il prodotto $a \cdot |\vec{u}|$, per direzione la stessa direzione di \vec{u} e come verso lo stesso di \vec{u} se $a > 0$, opposto a quello di \vec{u} se $a < 0$.

Es. $a = 3$

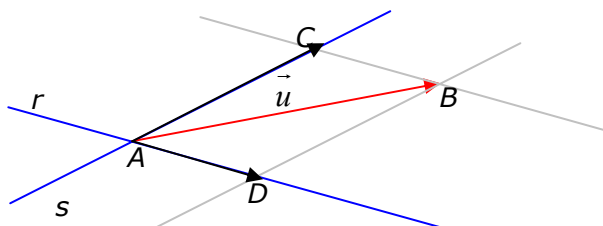


In particolare il prodotto di un vettore per il reciproco del suo modulo, $\frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}$, viene detto il *versore* di \vec{u} . (Dalla definizione ne segue che il modulo di un versore è uguale a 1).

Scomposizione di un vettore lungo due direzioni assegnate

Questo è il procedimento per cui dato un vettore \vec{u} e due rette r e s tra loro non parallele, è possibile trovare due vettori disposti lungo r e s in modo che la loro somma sia \vec{u} .

Per determinare i *vettori componenti* secondo le direzioni r e s si conducono dall'estremo del vettore \vec{u} le parallele alle rette date fino ad ottenere i punti C e D.

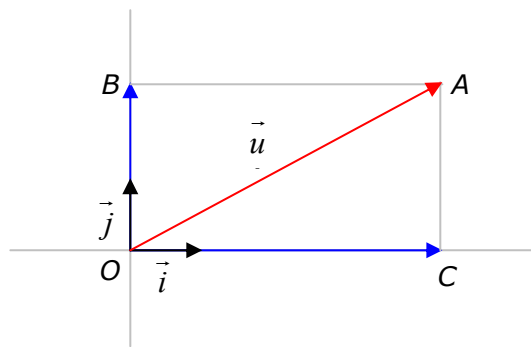


In accordo alla regola del parallelogramma per la somma di vettori, possiamo dunque scrivere che $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{AD}$ e concludere che i vettori \vec{AC} e \vec{AD} sono i *vettori componenti* di \vec{u} secondo le due rette assegnate r e s .

Componenti cartesiane di un vettore

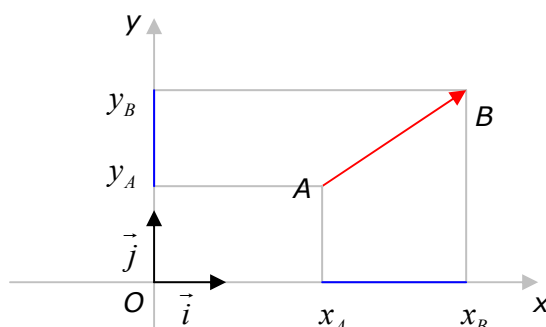
Sappiamo che un sistema cartesiano ortogonale xOy isometrico si ritiene assegnato quando, definiti due assi ortogonali, su questi si stabiliscono un'origine, un verso positivo e una unità di misura. In alternativa possiamo scegliere due versori ortogonali \vec{i} e \vec{j} : questi determinano due direzioni ortogonali, un verso positivo, e inoltre il segmento unitario rappresenta l'unità di misura. La coppia di versori $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ costituisce una base per il riferimento cartesiano.

Possiamo pertanto esprimere un qualsiasi vettore \vec{u} del piano nei termini delle sue componenti, ovvero come $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, e identificare la coppia di numeri (x, y) come le *componenti cartesiane* di \vec{u} e i vettori $x\vec{i}$ e $y\vec{j}$ come i *vettori componenti cartesiani* di \vec{u} .



Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OAC si può ricavare il modulo del vettore $\vec{u} = \vec{OA}$: $|\vec{OA}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Se in un riferimento cartesiano i punti origine ed estremi di un vettore \vec{AB} sono dati attraverso le loro coordinate cartesiane, $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, le componenti del vettore \vec{AB} nella base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ si ottengono dalla differenza delle corrispondenti coordinate dell'estremo B con quelle del punto iniziale A , ossia $\vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$.



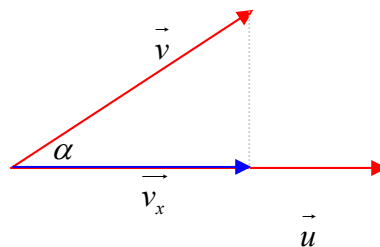
Il modulo di \overline{AB} si ottiene applicando il Teorema di Pitagora: $|\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

Prodotto scalare (o interno) di due vettori

Il **prodotto scalare** di due vettori \vec{u} e \vec{v} , indicato con $\vec{u} \times \vec{v}$, è il prodotto dei moduli dei due vettori moltiplicato per il *coseno* dell'angolo da essi formato: $\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$.

Osservazione: *il prodotto scalare di due vettori è un numero.*

Geometricamente il prodotto scalare di due vettori è il prodotto del modulo del primo moltiplicato per il modulo della proiezione del secondo sul primo.



Proprietà:

- il prodotto scalare è commutativo: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{u}$;
- vale la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma: $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$.

Se i due vettori del piano xOy sono assegnati attraverso le loro componenti cartesiane,

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j}$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j},$$

il prodotto scalare dei due vettori è dato dalla somma dei prodotti delle rispettive componenti:

$$\vec{u} \times \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y.$$

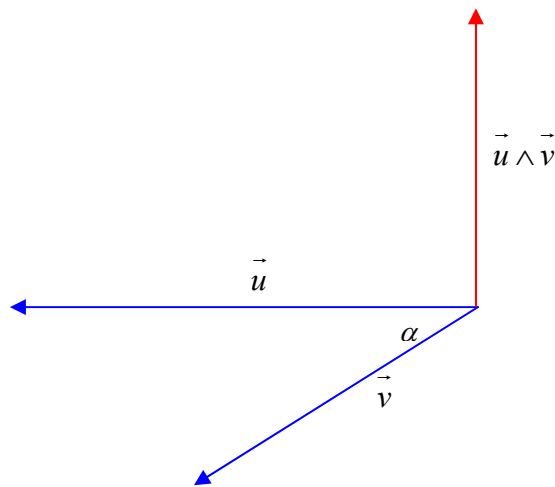
Osservazione.

Dalla definizione si deduce che il prodotto scalare di due vettori non nulli è nullo *se e solo se* i

due vettori sono tra loro perpendicolari: $\vec{u} \times \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$;

Prodotto vettoriale (o esterno) di due vettori

Si definisce **prodotto vettoriale** di due vettori \vec{u} e \vec{v} , non nulli né paralleli, indicato con $\vec{u} \wedge \vec{v}$, il vettore che ha per direzione la perpendicolare al piano individuato da \vec{u} e \vec{v} , per modulo il prodotto dei moduli dei due vettori moltiplicato per il *seno* dell'angolo da essi formato $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen } \alpha$, e il verso (regola della mano destra) è indicato dal pollice della mano destra quando le altre dita, inizialmente disposte lungo \vec{u} , si avvolgono verso \vec{v} percorrendo l'angolo α .



Proprietà:

- il prodotto vettoriale non è commutativo: $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$;
- vale la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma: $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$.

Se i due vettori del piano xOy sono assegnati attraverso le loro componenti cartesiane,

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j}$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j},$$

il prodotto vettoriale dei due vettori è dato da: $\vec{u} \times \vec{v} = u_x v_y - u_y v_x$.

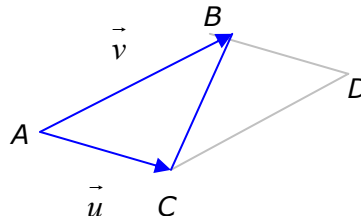
Osservazioni:

il prodotto vettoriale di due vettori è un vettore;

il prodotto vettoriale di due vettori non nulli è nullo se e solo se i vettori sono tra loro paralleli;

$$\text{Area del parallelogramma } ABCD = |\vec{u} \wedge \vec{v}|$$

$$\text{Area del triangolo } ABC = \frac{1}{2} |\vec{u} \wedge \vec{v}|$$



Prodotto misto di tre vettori

Si definisce **prodotto misto** di tre vettori \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} lo *scalare* $\vec{u} \wedge \vec{v} \times \vec{w}$.

Osservazioni:

l'operazione di prodotto vettoriale deve precedere quella di prodotto scalare, perché, mentre il risultato della prima è ancora un vettore che può subire la seconda, il risultato della seconda è uno scalare che non avrebbe senso moltiplicare vettorialmente; il prodotto misto si può

indicare anche con la scrittura $\vec{u} \times \vec{v} \wedge \vec{w}$ dove però è sottinteso l'uso della proprietà

associativa: $\vec{u} \times (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

$\vec{u} \wedge \vec{v} \times \vec{w} = 0 \Leftrightarrow$ i tre vettori sono complanari.

Proprietà:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \times \vec{w} = \vec{v} \wedge \vec{w} \times \vec{u} = \vec{w} \wedge \vec{u} \times \vec{v}$$

Il valore assoluto del prodotto misto di tre vettori $\vec{u} \wedge \vec{v} \times \vec{w}$ misura algebricamente il volume del parallelepipedo costruito sui tre vettori;

$$\text{Area del tetraedro} = \frac{1}{6} (\vec{u} \wedge \vec{v} \times \vec{w})$$

Doppio prodotto vettoriale

Viene definito doppio prodotto vettoriale il vettore $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$. Le parentesi sono indispensabili perché il doppio prodotto vettoriale non gode della proprietà associativa per cui:

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} \neq (\vec{u} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{v} \neq (\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u}.$$