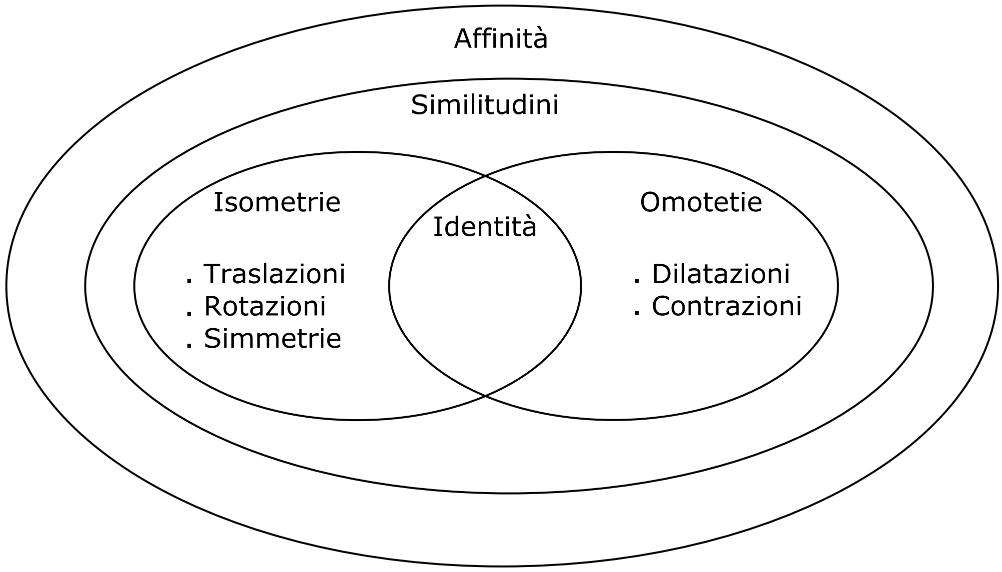
Le trasformazioni geometriche

Le trasformazioni geometriche
Le trasformazioni affini del piano o *affinità*
Le *similitudini*
Le *isometrie*
Le *traslazioni*
Le *rotazioni*
Le *simmetrie assiale* e *centrale*
Le *omotetie*

Classificazione



Definizioni

Una **trasformazione geometrica** T tra i punti di un piano è una corrispondenza biunivoca che ad ogni punto P del piano associa uno e un solo punto P' appartenente al piano stesso e viceversa.

$P' = T(P)$ è detto trasformato o **immagine** di P.

P è detto antitrasformato o **controimmagine** di P'.
Si dice trasformazione identica o **identità** la trasformazione che associa ad ogni punto P il punto stesso: $T(P) = P$.

Si dice **involutoria** una trasformazione che composta con se stessa, (ovvero applicata due volte), dà l'identità.

Fissato un sistema di riferimento (cartesiano ortogonale), le coordinate del punto $P'(x', y')$ possono essere espresse in funzione delle coordinate del punto $P(x, y)$:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

Queste equazioni rappresentano l'espressione analitica della trasformazione e forniscono le coordinate del punto trasformato P' quando sono assegnate le coordinate del punto P.

Affinché la legge di trasformazione sia ben definita, occorre che le funzioni *f* e *g* siano ovunque definite, e invertibili. Dal punto di vista algebrico esse dovranno soddisfare le seguenti condizioni:

- non possono essere funzioni razionali fratte perché eventuali coppie (x, y) che annullino il denominatore non avrebbero corrispondente nella trasformazione;
- non possono contenere potenze di grado pari di x o y perché la trasformazione non sarebbe biunivoca (due controimmagini per radicandi positivi o nessuna controimmagine nel caso di radicandi negativi);
- non possono essere irrazionali con indice pari perché le eventuali coppie (x, y) che rendono negativo il radicando non avrebbero immagine nella trasformazione.

Punti uniti
Un **punto** si dice **unito** rispetto alla trasformazione T se la sua immagine P' coincide con P.
Operativamente per determinare i punti uniti di una data trasformazione basta esprimere la condizione in termini di coordinate:

$$P \equiv P' \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x, y) = x \\ g(x, y) = y \end{cases}$$

E' bene ricordare che un sistema di equazioni può essere:
- *determinato* in tal caso si avrà un numero finito di punti uniti;
- *indeterminato* a cui corrisponderanno un numero infinito di punti uniti;
- *impossibile* e non si avranno punti uniti.

Figure unite
Si dice **unita** una **figura** che nella trasformazione corrisponde a se stessa.

Le figure unite non sempre sono costituite da punti uniti; per esempio in una simmetria assiale le rette perpendicolari all'asse di simmetria sono unite, ma non costituite da punti uniti.

Affinità

Un'**affinità** (o trasformazione affine) fra due piani π e π' è un'applicazione biiettiva T che fa corrispondere al punto $P(x,y)$ il punto $P'(x',y')$ secondo la formula:

$$\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$$

dove i coefficienti *a, b, c, d, e, f* sono numeri reali.
L'applicazione è biiettiva (quindi invertibile) se $ad - bc \neq 0$.

L'applicazione T può essere scritta anche sotto forma di prodotto fra matrici:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

sotto l'ipotesi che $\det A \neq 0$, dove la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è la matrice dell'affinità.

Si ha un'**affinità regolare** se $\det A \neq 0$
In particolare **diretta** se $\det A > 0$, **inversa** se $\det A < 0$.

La condizione $\det A = ad - bc \neq 0$ equivale a richiedere l'invertibilità della trasformazione che, come è noto dalla definizione, è una corrispondenza biunivoca dei punti del piano.

Proprietà fondamentali.

Si può dimostrare che un'affinità gode delle seguenti proprietà:

- trasforma rette in rette;
- se tre punti *P*, *Q*, *R* sono allineati, i loro corrispondenti in un'affinità *P'*, *Q'*, *R'* sono anch'essi allineati;
- a rette parallele corrispondono rette parallele e a rette incidenti corrispondono rette incidenti;
- conserva il rapporto fra segmenti paralleli (in particolare al punto medio di un segmento corrisponde il punto medio del segmento trasformato);
- se la figura *S'* è l'immagine corrispondente di una figura *S*, allora $\dfrac{Area\ (S')}{Area\ (S)} = |\det A|$

  dove $\det A = ad - bc$.

In generale un'affinità:

- non conserva la forma delle figure. Infatti l'immagine di un rettangolo è in generale un parallelogramma, così come l'immagine di una circonferenza è un'ellisse.
- non conserva gli angoli, per esempio rette perpendicolari non necessariamente vengono trasformate in rette perpendicolari.

Similitudini

Una **similitudine** è una trasformazione geometrica affine in cui resta invariato il rapporto fra le distanze di coppie di punti corrispondenti (*A,B*) e (*A',B'*) ovvero: $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = k$.

Dal punto di vista analitico una **similitudine** è un tipo particolare di affinità in cui risulti: $a = d$ e $c = -b$ oppure $a = -d$ e $c = b$ (coefficienti diagonali opposti).
Perciò una similitudine può essere rappresentata in due soli modi:

$$\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = -bx + ay + f \end{cases}$$ similitudini dirette $\det A > 0$

oppure $$\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = bx - ay + f \end{cases}$$ similitudini inverse $\det A < 0$.

Il numero k positivo definito da $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ si dice **rapporto di similitudine**.

Proprietà fondamentali
Si può dimostrare che una similitudine gode delle seguenti proprietà:

- Una similitudine trasforma segmenti in segmenti di rapporto k (definizione);
- Una similitudine trasforma rette in rette;
- Una similitudine trasforma angoli in angoli di uguale ampiezza, in particolare conserva il parallelismo e la perpendicolarità;
- Una similitudine trasforma aree in aree di rapporto k^2. Se la figura S' è l'immagine corrispondente di una figura S, allora $\frac{Area\ (S')}{Area\ (S)} = k^2$;
- Il centro di similitudine è punto unito;
- Le similitudini mantengono la "forma", in particolare trasformano circonferenze in circonferenze, ... , cioè trasformano una figura geometrica in una figura simile a quella data.

Isometrie

Si dice **isometria** una trasformazione geometrica affine che conserva le distanze. Dati due punti *A*, *B* l'isometria fa ad essi corrispondere due punti *A'* e *B'* tali che $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.
Pertanto le figure trasformate conservano la forma e la grandezza e dunque risultano congruenti a quelle date.
Sono isometrie le:

- Traslazioni
- Rotazioni
- Simmetrie centrali ed assiali.

Traslazione

Traslazione di vettore $\vec{v}(x_0, y_0)$ è una trasformazione che ad ogni punto P del piano associa un punto P' tale che il vettore $\overrightarrow{PP'}$ è uguale al vettore $\vec{v}$.

Se (x_0, y_0) sono le componenti del vettore $\vec{v}$ l'espressione analitica della traslazione è data da:

$\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases}$. La matrice della trasformazione è la matrice identità.

Proprietà fondamentali
Si può dimostrare che una traslazione gode delle seguenti proprietà:

- la traslazione identità (traslazione di vettore nullo), ovvero la trasformazione che porta ogni punto del piano in se stesso, è un particolare tipo di traslazione. Tutti i suoi punti sono uniti. Le sue equazioni sono le seguenti: $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$;
- una traslazione diversa dall'identità non ha punti uniti;
- le rette parallele al vettore di traslazione sono rette unite;
- qualunque retta viene trasformata in una retta ad essa parallela;
- una traslazione trasforma una figura geometrica in una figura congruente a quella data, ma traslata.

Rotazione

La **rotazione** di centro C e angolo α è la trasformazione che ad ogni punto P del piano associa un punto P' tale che $\overline{PC} = \overline{P'C}$ e l'angolo $P\hat{C}P' = \alpha$.

Le equazioni analitiche di una rotazione di angolo α in senso antiorario sono:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ y' = x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

La matrice della trasformazione è $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ dove $\det A = \cos^2\alpha + \mathrm{sen}^2\alpha = 1$.

Proprietà fondamentali
Si può dimostrare che per una rotazione valgono le seguenti proprietà:

- l'origine è l'unico punto unito;
- una rotazione trasforma una figura geometrica in una figura congruente a quella data.

Simmetria centrale

La simmetria centrale di centro C è una trasformazione che ad ogni punto P del piano associa un punto P' tale che C è il punto medio del segmento $\overline{PP'}$.

Considerando la proprietà delle coordinate del punto medio, possiamo dedurre dalla definizione le equazioni della trasformazione: $\begin{cases} x' = 2x_c - x \\ y' = 2y_c - y \end{cases}$

o anche le equazioni della trasformazione inversa: $\begin{cases} x = 2x_c - x' \\ y = 2y_c - y' \end{cases}$

Com'è evidente la trasformazione e la sua inversa sono formalmente identiche salvo lo scambio apice ↔ non apice, trattandosi di una trasformazione involutoria.

Proprietà fondamentali
Si può dimostrare che una simmetria centrale gode delle seguenti proprietà:

- La simmetria centrale ha un solo punto unito: il centro C.
- Tutte le rette passanti per C sono unite.
- La simmetria centrale è un'isometria.
- La simmetria centrale è un'isometria diretta.
- La simmetria centrale è involutoria.
- Rette che si corrispondono in una simmetria centrale sono parallele.

Simmetria assiale

La **simmetria assiale** di asse: $ax + by + c = 0$ è una trasformazione che ad ogni punto P del piano associa un punto P' tale che il segmento $\overline{PP'}$ è perpendicolare all'asse e il punto medio M di $\overline{PP'}$ appartiene all'asse.

Esprimendo le condizioni imposte dalla definizione nei termini delle coordinate, possiamo dedurre immediatamente le equazioni della trasformazione:

$$\begin{cases} PP' \perp ax + by + c = 0 \\ M_{PP'} \in ax + by + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_{PP'} = -\dfrac{1}{m_{asse}} \\ a\dfrac{x + x'}{2} + b\dfrac{y + y'}{2} + c = 0 \end{cases}$$

Per scrivere le equazioni della trasformazione in forma esplicita si dovrà risolvere il sistema rispetto a x' e y'. Per il calcolo dei casi più semplici si consiglia di utilizzare il metodo di sostituzione, altrimenti è preferibile il metodo di Cramer.
Dal punto di vista analitico le equazioni di una simmetria assiale sono del tipo:

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + \gamma \\ y' = \beta x - \alpha y + \delta \end{cases} \quad \text{con} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

In particolare se l'asse passa per l'origine i termini noti si annullano.

Proprietà fondamentali
Si può dimostrare che una simmetria centrale gode delle seguenti proprietà:

- Tutti i punti dell'asse di simmetria sono uniti: l'asse è quindi una retta unita luogo di punti uniti.
- Tutte le rette perpendicolari all'asse sono unite, ma non costituite da punti uniti.
- La simmetria assiale è involutoria, pertanto le equazioni della trasformazione e quelle della sua inversa sono formalmente identiche salvo lo scambio apice ↔ non apice (valgono le stesse considerazioni fatte per la simmetria centrale)
- La simmetria assiale è un'isometria.
- La simmetria assiale è un'isometria inversa.
- La simmetria assiale, come tutte le isometrie, conserva le relazioni di perpendicolarità e parallelismo.
- Si può dimostrare che componendo due simmetrie assiali rispetto ad assi perpendicolari si ottiene una simmetria centrale, con centro nel punto d'intersezione tra i due assi.

Simmetrie rispetto ad assi particolari

Nel caso di assi di simmetria particolari (assi cartesiani, rette parallele agli assi cartesiani o bisettrici dei quadranti) non è necessario ricorrere alla definizione per ottenere le equazioni della simmetria assiale, ma è sufficiente visualizzare graficamente la situazione per ottenere i risultati riportati nella seguente tabella:

Rispetto all'asse delle ascisse ($y = 0$)

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

Rispetto all'asse delle ordinate ($x = 0$)

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

Rispetto ad una retta parallela all'asse delle ascisse ($y = k$)

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2k \end{cases}$$

Rispetto ad una retta parallela all'asse delle ordinate ($x = h$)

$$\begin{cases} x' = -x + 2h \\ y' = y \end{cases}$$

Rispetto alla bisettrice I, III ($y = x$)

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

Rispetto alla bisettrice II, IV ($y = -x$)

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$$

Omotetie

Dato un punto O nel piano ed un numero reale $k \neq 0$, la trasformazione T che ad ogni punto P del piano fa corrispondere il punto P', allineato con O e, tale che sia: $\frac{OP'}{OP} = k$ è detta **omotetia** di centro O e rapporto k.

O si dice centro di omotetia. La costante k è detta rapporto di omotetia.

- Se il centro dell'omotetia O coincide con l'origine degli assi, le equazioni analitiche dell'omotetia sono: $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$.

  La matrice della trasformazione è data da $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$, dove $\det A = k^2$.

- Se il centro dell'omotetia $C(a,b)$ non coincide con l'origine degli assi, le equazioni analitiche dell'omotetia sono: $\begin{cases} x' = kx + a(1-k) \\ y' = ky + b(1-k) \end{cases}$.

Casi particolari:

- se $k > 0$ l'omotetia si dice **diretta**. P e P' si trovano dalla stessa parte rispetto ad O;
- se $k < 0$ l'omotetia si dice **inversa**. P e P' si trovano da parti opposte rispetto ad O;
- se $k = 1$ si ha l'identità;
- se $k = -1$ si ha la simmetria rispetto all'origine.

Proprietà fondamentali.

Si può dimostrare che un'omotetia gode delle seguenti proprietà:

- l'omotetia trasforma una retta in una retta parallela alla retta data;
- le rette che passano per il centro di omotetia sono rette unite;
- l'omotetia è una similitudine;
- se $k \neq 1$ il centro di omotetia è l'unico punto unito;
- l'omotetia trasforma una figura geometrica in una figura simile a quella data;
- se la figura S' è l'immagine corrispondente di una figura S, allora $\frac{Area\ (S')}{Area\ (S)} = k^2$.