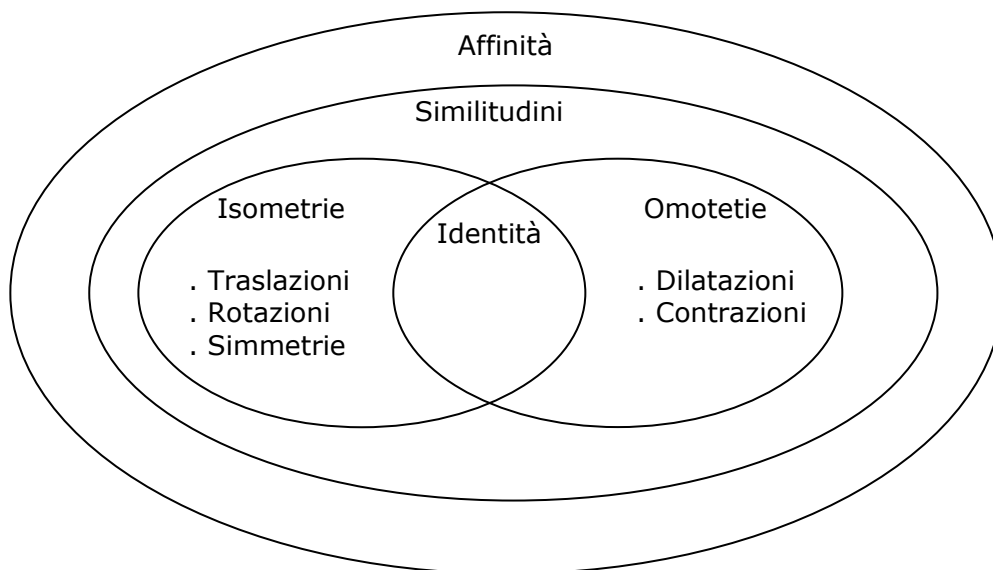


# Le trasformazioni geometriche

Le trasformazioni geometriche  
Le trasformazioni affini del piano o *affinità*  
Le *similitudini*  
Le *isometrie*  
Le *traslazioni*  
Le *rotazioni*  
Le *simmetrie assiale e centrale*  
Le *omotetie*

## Classificazione



## Definizioni

Una **trasformazione geometrica**  $T$  tra i punti di un piano è una corrispondenza biunivoca che ad ogni punto  $P$  del piano associa uno e un solo punto  $P'$  appartenente al piano stesso e viceversa.

$P' = T(P)$  è detto trasformato o **immagine** di  $P$ .

$P$  è detto antitrasformato o **controimmagine** di  $P'$ .

Si dice trasformazione identica o **identità** la trasformazione che associa ad ogni punto  $P$  il punto stesso:  $T(P) = P$ .

Si dice **involutoria** una trasformazione che composta con se stessa, (ovvero applicata due volte), dà l'identità.

Fissato un sistema di riferimento (cartesiano ortogonale), le coordinate del punto  $P'(x', y')$  possono essere espresse in funzione delle coordinate del punto  $P(x, y)$ :

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

Queste equazioni rappresentano l'espressione analitica della trasformazione e forniscono le coordinate del punto trasformato  $P'$  quando sono assegnate le coordinate del punto  $P$ .

Affinché la legge di trasformazione sia ben definita, occorre che le funzioni  $f$  e  $g$  siano ovunque definite, e invertibili. Dal punto di vista algebrico esse dovranno soddisfare le seguenti condizioni:

- non possono essere funzioni razionali fratte perché eventuali coppie  $(x, y)$  che annullino il denominatore non avrebbero corrispondente nella trasformazione;
- non possono contenere potenze di grado pari di  $x$  o  $y$  perché la trasformazione non sarebbe biunivoca (due controimmagini per radicandi positivi o nessuna controimmagine nel caso di radicandi negativi);
- non possono essere irrazionali con indice pari perché le eventuali coppie  $(x, y)$  che rendono negativo il radicando non avrebbero immagine nella trasformazione.

### Punti uniti

Un **punto** si dice **unito** rispetto alla trasformazione  $T$  se la sua immagine  $P'$  coincide con  $P$ . Operativamente per determinare i punti uniti di una data trasformazione basta esprimere la condizione in termini di coordinate:

$$P \equiv P' \Rightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x, y) = x \\ g(x, y) = y \end{cases}$$

E' bene ricordare che un sistema di equazioni può essere:

- *determinato* in tal caso si avrà un numero finito di punti uniti;
- *indeterminato* a cui corrisponderanno un numero infinito di punti uniti;
- *impossibile* e non si avranno punti uniti.

### Figure unite

Si dice **unita** una **figura** che nella trasformazione corrisponde a se stessa.

Le figure unite non sempre sono costituite da punti uniti; per esempio in una simmetria assiale le rette perpendicolari all'asse di simmetria sono unite, ma non costituite da punti uniti.

## Affinità

Un'**affinità** (o trasformazione affine) fra due piani  $\pi$  e  $\pi'$  è un'applicazione biettiva  $T$  che fa corrispondere al punto  $P(x, y)$  il punto  $P'(x', y')$  secondo la formula:

$$\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$$

dove i coefficienti  $a, b, c, d, e, f$  sono numeri reali.

L'applicazione è biettiva (quindi invertibile) se  $ad - bc \neq 0$ .

L'applicazione  $T$  può essere scritta anche sotto forma di prodotto fra matrici:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

sotto l'ipotesi che  $\det A \neq 0$ , dove la matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  è la matrice dell'affinità.

Si ha un'**affinità regolare** se  $\det A \neq 0$

In particolare **diretta** se  $\det A > 0$ , **inversa** se  $\det A < 0$ .

La condizione  $\det A = ad - bc \neq 0$  equivale a richiedere l'invertibilità della trasformazione che, come è noto dalla definizione, è una corrispondenza biunivoca dei punti del piano.

### Proprietà fondamentali.

Si può dimostrare che un'affinità gode delle seguenti proprietà:

- trasforma rette in rette;
- se tre punti  $P, Q, R$  sono allineati, i loro corrispondenti in un'affinità  $P', Q', R'$  sono anch'essi allineati;
- a rette parallele corrispondono rette parallele e a rette incidenti corrispondono rette incidenti;
- conserva il rapporto fra segmenti paralleli (in particolare al punto medio di un segmento corrisponde il punto medio del segmento trasformato);
- se la figura  $S'$  è l'immagine corrispondente di una figura  $S$ , allora  $\frac{\text{Area}(S')}{\text{Area}(S)} = |\det A|$

dove  $\det A = ad - bc$ .

In generale un'affinità:

- non conserva la forma delle figure. Infatti l'immagine di un rettangolo è in generale un parallelogramma, così come l'immagine di una circonferenza è un'ellisse.
- non conserva gli angoli, per esempio rette perpendicolari non necessariamente vengono trasformate in rette perpendicolari.

## Similitudini

Una **similitudine** è una trasformazione geometrica affine in cui resta invariato il rapporto fra le distanze di coppie di punti corrispondenti  $(A,B)$  e  $(A',B')$  ovvero:  $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = k$ .

Dal punto di vista analitico una **similitudine** è un tipo particolare di affinità in cui risulti:  $a = d$  e  $c = -b$  oppure  $a = -d$  e  $c = b$  (coefficienti diagonali opposti).

Perciò una similitudine può essere rappresentata in due soli modi:

$$\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = -bx + ay + f \end{cases} \quad \text{similitudini dirette } \det A > 0$$

$$\text{oppure } \begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = bx - ay + f \end{cases} \quad \text{similitudini inverse } \det A < 0.$$

Il numero  $k$  positivo definito da  $k = \sqrt{a^2 + b^2}$  si dice **rapporto di similitudine**.

### Proprietà fondamentali

Si può dimostrare che una similitudine gode delle seguenti proprietà:

- Una similitudine trasforma segmenti in segmenti di rapporto  $k$  (definizione);
- Una similitudine trasforma rette in rette;
- Una similitudine trasforma angoli in angoli di uguale ampiezza, in particolare conserva il parallelismo e la perpendicolarità;
- Una similitudine trasforma aree in aree di rapporto  $k^2$ . Se la figura  $S'$  è l'immagine corrispondente di una figura  $S$ , allora  $\frac{\text{Area}(S')}{\text{Area}(S)} = k^2$ ;
- Il centro di similitudine è punto unito;
- Le similitudini mantengono la "forma", in particolare trasformano circonferenze in circonferenze, ... , cioè trasformano una figura geometrica in una figura simile a quella data.

## Isometrie

Si dice **isometria** una trasformazione geometrica affine che conserva le distanze. Dati due punti  $A, B$  l'isometria fa ad essi corrispondere due punti  $A'$  e  $B'$  tali che  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ . Pertanto le figure trasformate conservano la forma e la grandezza e dunque risultano congruenti a quelle date.

Sono isometrie le:

- Traslazioni
- Rotazioni
- Simmetrie centrali ed assiali.

## Traslazione

**Traslazione di vettore**  $\vec{v}(x_0, y_0)$  è una trasformazione che ad ogni punto  $P$  del piano associa un punto  $P'$  tale che il vettore  $\overline{PP'}$  è uguale al vettore  $\vec{v}$ .

Se  $(x_0, y_0)$  sono le componenti del vettore  $\vec{v}$  l'espressione analitica della traslazione è data da:

$$\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases} . \text{ La matrice della trasformazione è la matrice identità.}$$

### Proprietà fondamentali

Si può dimostrare che una traslazione gode delle seguenti proprietà:

- la traslazione identità (traslazione di vettore nullo), ovvero la trasformazione che porta ogni punto del piano in se stesso, è un particolare tipo di traslazione. Tutti i suoi punti sono uniti. Le sue equazioni sono le seguenti:  $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$  ;
- una traslazione diversa dall'identità non ha punti uniti;
- le rette parallele al vettore di traslazione sono rette unite;
- qualunque retta viene trasformata in una retta ad essa parallela;
- una traslazione trasforma una figura geometrica in una figura congruente a quella data, ma traslata.

## Rotazione

La **rotazione** di centro  $C$  e angolo  $\alpha$  è la trasformazione che ad ogni punto  $P$  del piano associa un punto  $P'$  tale che  $\overline{PC} = \overline{P'C}$  e l'angolo  $\widehat{PCP'} = \alpha$ .

Le equazioni analitiche di una rotazione di angolo  $\alpha$  in senso antiorario sono:

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

La matrice della trasformazione è  $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  dove  $\det A = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ .

### Proprietà fondamentali

Si può dimostrare che per una rotazione valgono le seguenti proprietà:

- l'origine è l'unico punto unito;
- una rotazione trasforma una figura geometrica in una figura congruente a quella data.

## Simmetria centrale

La simmetria centrale di centro  $C$  è una trasformazione che ad ogni punto  $P$  del piano associa un punto  $P'$  tale che  $C$  è il punto medio del segmento  $\overline{PP'}$ .

Considerando la proprietà delle coordinate del punto medio, possiamo dedurre dalla

definizione le equazioni della trasformazione: 
$$\begin{cases} x' = 2x_c - x \\ y' = 2y_c - y \end{cases}$$

o anche le equazioni della trasformazione inversa: 
$$\begin{cases} x = 2x_c - x' \\ y = 2y_c - y' \end{cases}$$

Com'è evidente la trasformazione e la sua inversa sono formalmente identiche salvo lo scambio apice  $\leftrightarrow$  non apice, trattandosi di una trasformazione involutoria.

### Proprietà fondamentali

Si può dimostrare che una simmetria centrale gode delle seguenti proprietà:

- La simmetria centrale ha un solo punto unito: il centro  $C$ .
- Tutte le rette passanti per  $C$  sono unite.
- La simmetria centrale è un'isometria.
- La simmetria centrale è un'isometria diretta.
- La simmetria centrale è involutoria.
- Rette che si corrispondono in una simmetria centrale sono parallele.

### Simmetria assiale

La **simmetria assiale** di asse:  $ax + by + c = 0$  è una trasformazione che ad ogni punto  $P$  del piano associa un punto  $P'$  tale che il segmento  $\overline{PP'}$  è perpendicolare all'asse e il punto medio  $M$  di  $\overline{PP'}$  appartiene all'asse.

Esprimendo le condizioni imposte dalla definizione nei termini delle coordinate, possiamo dedurre immediatamente le equazioni della trasformazione:

$$\begin{cases} PP' \perp ax + by + c = 0 \\ M_{PP'} \in ax + by + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_{PP'} = -\frac{1}{m_{asse}} \\ a\frac{x+x'}{2} + b\frac{y+y'}{2} + c = 0 \end{cases}$$

Per scrivere le equazioni della trasformazione in forma esplicita si dovrà risolvere il sistema rispetto a  $x'$  e  $y'$ . Per il calcolo dei casi più semplici si consiglia di utilizzare il metodo di sostituzione, altrimenti è preferibile il metodo di Cramer.

Dal punto di vista analitico le equazioni di una simmetria assiale sono del tipo:

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + \gamma \\ y' = \beta x - \alpha y + \delta \end{cases} \quad \text{con} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

In particolare se l'asse passa per l'origine i termini noti si annullano.

### Proprietà fondamentali

Si può dimostrare che una simmetria assiale gode delle seguenti proprietà:

- Tutti i punti dell'asse di simmetria sono uniti: l'asse è quindi una retta unita luogo di punti uniti.
- Tutte le rette perpendicolari all'asse sono unite, ma non costituite da punti uniti.
- La simmetria assiale è involutoria, pertanto le equazioni della trasformazione e quelle della sua inversa sono formalmente identiche salvo lo scambio apice  $\leftrightarrow$  non apice (valgono le stesse considerazioni fatte per la simmetria centrale)
- La simmetria assiale è un'isometria.
- La simmetria assiale è un'isometria inversa.
- La simmetria assiale, come tutte le isometrie, conserva le relazioni di perpendicolarità e parallelismo.
- Si può dimostrare che componendo due simmetrie assiali rispetto ad assi perpendicolari si ottiene una simmetria centrale, con centro nel punto d'intersezione tra i due assi.

### **Simmetrie rispetto ad assi particolari**

Nel caso di assi di simmetria particolari (assi cartesiani, rette parallele agli assi cartesiani o bisettrici dei quadranti) non è necessario ricorrere alla definizione per ottenere le equazioni della simmetria assiale, ma è sufficiente visualizzare graficamente la situazione per ottenere i risultati riportati nella seguente tabella:

#### **Rispetto all'asse delle ascisse ( $y = 0$ )**

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

#### **Rispetto all'asse delle ordinate ( $x = 0$ )**

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

#### **Rispetto ad una retta parallela all'asse delle ascisse ( $y = k$ )**

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2k \end{cases}$$

#### **Rispetto ad una retta parallela all'asse delle ordinate ( $x = h$ )**

$$\begin{cases} x' = -x + 2h \\ y' = y \end{cases}$$

#### **Rispetto alla bisettrice I, III ( $y = x$ )**

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

#### **Rispetto alla bisettrice II, IV ( $y = -x$ )**

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$$

## Omotetie

Dato un punto  $O$  nel piano ed un numero reale  $k \neq 0$ , la trasformazione  $T$  che ad ogni punto  $P$  del piano fa corrispondere il punto  $P'$ , allineato con  $O$  e  $P$ , tale che sia:  $\frac{OP'}{OP} = k$  è detta **omotetia** di centro  $O$  e rapporto  $k$ .

$O$  si dice centro di omotetia. La costante  $k$  è detta rapporto di omotetia.

- Se il centro dell'omotetia  $O$  coincide con l'origine degli assi, le equazioni analitiche dell'omotetia sono: 
$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

La matrice della trasformazione è data da  $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ , dove  $\det A = k^2$ .

- Se il centro dell'omotetia  $C(a, b)$  non coincide con l'origine degli assi, le equazioni analitiche dell'omotetia sono: 
$$\begin{cases} x' = kx + a(1-k) \\ y' = ky + b(1-k) \end{cases}$$

### Casi particolari:

- se  $k > 0$  l'omotetia si dice **diretta**.  $P$  e  $P'$  si trovano dalla stessa parte rispetto ad  $O$ ;
- se  $k < 0$  l'omotetia si dice **inversa**.  $P$  e  $P'$  si trovano da parti opposte rispetto ad  $O$ ;
- se  $k = 1$  si ha l'identità;
- se  $k = -1$  si ha la simmetria rispetto all'origine.

### Proprietà fondamentali.

Si può dimostrare che un'omotetia gode delle seguenti proprietà:

- l'omotetia trasforma una retta in una retta parallela alla retta data;
- le rette che passano per il centro di omotetia sono rette unite;
- l'omotetia è una similitudine;
- se  $k \neq 1$  il centro di omotetia è l'unico punto unito;
- l'omotetia trasforma una figura geometrica in una figura simile a quella data;
- se la figura  $S'$  è l'immagine corrispondente di una figura  $S$ , allora  $\frac{\text{Area}(S')}{\text{Area}(S)} = k^2$ .