

STUDIO DI FUNZIONE: razionale frazionaria

$y = f(x)$	$y = \frac{3-x}{(x-2)^3}$
Campo di Esistenza	$CDE = \{\forall x \in (-\infty, +2) \cup (+2, +\infty)\}$
Eventuali intersezioni con gli assi coordinati	intersezione con l'asse x : $(3,0)$ intersezione con l'asse y : $(0, -\frac{3}{8})$
segno della funzione	la funzione è positiva in : $2 < x < 3$
comportamento agli estremi del dominio	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x}{(x-2)^3} = 0^-$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3-x}{(x-2)^3} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3-x}{(x-2)^3} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-x}{(x-2)^3} = 0^-$
eventuali asintoti	asintoti verticali: $x = 2$ asintoti orizzontali: $y = 0$ asintoti obliqui: nessuno
derivate	$y' = \frac{2x-7}{(x-2)^4}$; $y'' = \frac{6(4-x)}{(x-2)^5}$
monotonia	la funzione è decrescente : $x < \frac{7}{2}$ la funzione è crescente : $x > \frac{7}{2}$
eventuali massimi e minimi relativi	minimo : $(\frac{7}{2}, -\frac{4}{27})$ massimo : nessuno
concavità e convessità	la funzione presenta la concavità verso l'alto in : $2 < x < 4$ la funzione presenta la concavità verso il basso in : $x < 2, x > 4$
eventuali punti di flesso	punto di flesso ascendente : $(4, -\frac{1}{8})$
grafico	

STUDIO DI FUNZIONE: razionale frazionaria

$$y = \frac{3-x}{(x-2)^3}$$

Campo di Esistenza

$y = \frac{3-x}{(x-2)^3}$ è una funzione razionale fratta, perciò basterà imporre che il denominatore non sia nullo:

$$x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2.$$

Questo si verifica sempre nel campo dei numeri Reali, quindi il CDE della funzione è costituito dall'unione degli intervalli:

$$\text{CDE} = \{\forall x \in (-\infty, +2) \cup (+2, +\infty)\}.$$

Intersezioni con gli assi coordinati

Intersezione con l'asse x:

$$\begin{cases} y = \frac{3-x}{(x-2)^3} \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} \frac{3-x}{(x-2)^3} = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} 3-x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

il punto in cui la curva interseca l'asse x è: $(3,0)$

Intersezione con l'asse y:

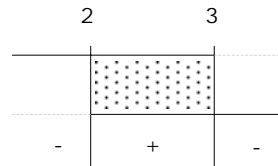
$$\begin{cases} y = \frac{3-x}{(x-2)^3} \\ x = 0 \end{cases}, \begin{cases} y = \frac{3}{(0-2)^3} \\ x = 0 \end{cases}, \begin{cases} y = \frac{3}{-8} \\ x = 0 \end{cases}, \begin{cases} y = -\frac{3}{8} \\ x = 0 \end{cases}$$

Il punto in cui la curva interseca l'asse y è: $(0, -\frac{3}{8})$

Segno della funzione

Studiamo in quali intervalli la funzione è positiva, ovvero in quali regioni del CDE la funzione si dispone sopra l'asse delle ascisse:

$$\frac{3-x}{(x-2)^3} > 0, \quad \begin{array}{l} \text{N} > 0 \quad 3-x > 0 \quad -x > -3 \quad x < 3 \\ \text{D} > 0 \quad (x-2)^3 > 0 \quad x-2 > 0 \quad x > 2 \end{array}$$



La funzione risulta positiva per valori $2 < x < 3$.

Studio coi limiti del comportamento della funzione agli estremi del dominio.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x}{(x-2)^3} = \frac{\infty}{\infty}$$

Il limite si risolve confrontando gli ordini di infinito del numeratore e del denominatore. Al numeratore compare un binomio di 1° grado, mentre al denominatore un polinomio di 3° grado. L'ordine di infinito del denominatore è più alto, quindi tende ad infinito più rapidamente: la frazione tende dunque a 0.

La funzione, quando x tende a $-\infty$, tende al valore 0^- .

In altro modo, la forma di indeterminazione si elimina raccogliendo al numeratore e al denominatore la stessa quantità; si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x}{(x-2)^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(\frac{3}{x} - 1 \right)}{x \left(x^2 - 6x + 12 - \frac{8}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{+\infty} = 0^-$$

semplificando per x , sostituendo $-\infty$ al posto della variabile e notando che il $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{8}{x} = 0$, si ottiene

infine:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x}{(x-2)^3} = 0^-.$$

In modo analogo si procede per l'altro limite e si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-x}{(x-2)^3} = 0^-.$$

Quindi la curva ha come asintoto orizzontale la retta di equazione $y = 0$

Calcoliamo ora gli altri limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3-x}{(x-2)^3} = \frac{3-2^-}{(2^- - 2)^3} = \frac{1}{(0^-)^3} = \frac{1}{0^-} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3-x}{(x-2)^3} = \frac{3-2^+}{(2^+ - 2)^3} = \frac{1}{(0^+)^3} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Asintoti verticali

Dall'esame del CDE e dal calcolo dei limiti che tendono ad ∞ :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3-x}{(x-2)^3} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3-x}{(x-2)^3} = +\infty$$

si deduce che la funzione possiede un asintoto verticale di equazione $x = 2$.

Asintoti orizzontali

Dal calcolo del limite $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-x}{(x-2)^3} = 0$ si deduce che la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale per la curva.

Calcolo delle derivate

$$y' = \frac{-1(x-2)^3 - (3-x)3(x-2)^2}{(x-2)^6} = -\frac{(x-2)^2(x-2+9-3x)}{(x-2)^6} = -\frac{7-2x}{(x-2)^4} = \frac{2x-7}{(x-2)^4};$$

$$y'' = \frac{2(x-2)^4 - (2x-7)4(x-2)^3}{(x-2)^8} = \frac{2(x-2)^3(x-2-4x-14)}{(x-2)^8} = \frac{2(-3x+12)}{(x-2)^5} = \frac{6(4-x)}{(x-2)^5}$$

Ricerca di eventuali punti di massimo o minimo relativi

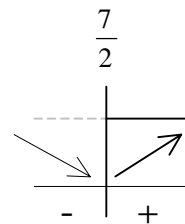
$$y' = 0 \Rightarrow \frac{2x-7}{(x-2)^4} = 0, \quad 2x-7=0, \quad x = \frac{7}{2}.$$

In tale punto esiste un probabile massimo o minimo.

Per saperne di più studiamo la monotonia della funzione.

Studio della monotonia

$$y' > 0 \Rightarrow \frac{2x-7}{(x-2)^4} > 0 \quad \begin{array}{l} N > 0 \quad 2x-7 > 0 \quad 2x > 7 \quad x > \frac{7}{2} \\ D > 0 \quad (x-2)^4 > 0 \end{array} \quad \text{sempre vero}$$



quindi la curva risulta decrescente per valori $x < \frac{7}{2}$, e crescente per valori $x > \frac{7}{2}$.

Questo conferma che esiste un punto di minimo relativo per la funzione.

Calcoliamo allora l'ordinata di tale punto sostituendo il valore dell'ascissa nell'equazione:

$$y = \frac{3 - \frac{7}{2}}{\left(\frac{7}{2} - 2\right)^3} = \frac{\frac{6-7}{2}}{\left(\frac{7-4}{2}\right)^3} = \frac{-\frac{1}{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{27} = -\frac{4}{27}.$$

La funzione presenta un punto di minimo relativo di coordinate $\left(\frac{7}{2}, -\frac{4}{27}\right)$

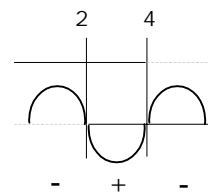
Ricerca di eventuali punti di flesso

$$y'' = 0 \Rightarrow \frac{6(4-x)}{(x-2)^5} = 0, \quad 4-x=0, \quad x=4.$$

L'ascissa del probabile punto di flesso è $x = 4$.

Studio della concavità

$$y'' > 0 \Rightarrow \frac{6(4-x)}{(x-2)^5} > 0 \quad \begin{array}{l} N > 0 \quad 4-x > 0 \quad -x > -4, \quad x < 4 \\ D > 0 \quad (x-2)^5 > 0 \quad x-2 > 0 \quad x > 2 \end{array}$$



La curva quindi presenta la concavità verso l'alto in: $2 < x < 4$,

mentre presenta la concavità verso il basso in: $x < 2, x > 4$.

Il punto di ascissa $+2$ che non appartiene al CDE della funzione, non è da considerarsi un flesso, anche se la curva ivi cambia la sua concavità.

Calcoliamo ora le ordinate del punto di flesso sostituendo il valore ottenuto nella funzione:

$$y = \frac{3-4}{(4-2)^3} = \frac{-1}{(2)^3} = -\frac{1}{8}.$$

Per cui il punto di coordinate $\left(4, -\frac{1}{8}\right)$ è un flesso ascendente.