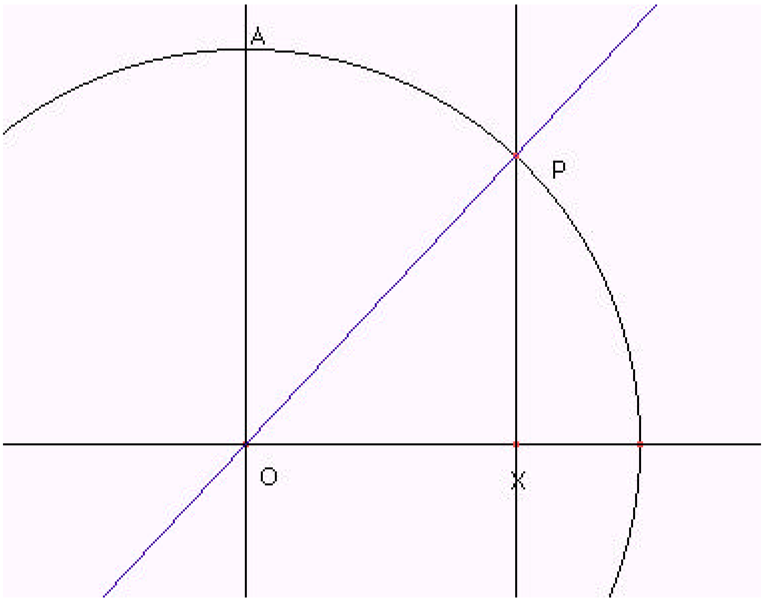
Calcolo dell'integrale circolare

Come è noto, l'integrale indefinito di una funzione integrabile *f(x)* può essere calcolato come somma di una qualsiasi primitiva F(x) della *f(x)* e di una costante arbitraria.

In particolare, F(x) può essere la funzione integrale $\int_a^x f(t)dt$.

Questo metodo può essere applicato per calcolare l'integrale $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$.

Consideriamo $\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$. Esso rappresenta l'area della parte finita di piano compresa tra l'asse Oy , l'asse Ox, la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = a^2$ e la retta parallela a Oy di equazione $x = x$.



Il rettangoloide OXPA viene scomposto nel triangolo OXP e nel settore circolare POA. Essendo

OX = x ,
OP = a ,
PX = $\sqrt{a^2 - x^2}$,

l'area del triangolo è data da $\frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2}$.

L'area del settore circolare è il semiprodotto dell'arco per il raggio, cioè $\frac{1}{2} a^2 \cdot \alpha$, essendo α la misura in radianti dell'angolo $A\hat{O}P$. Poiché $\sin(A\hat{O}P) = \frac{x}{a}$, avremo $\alpha = \arcsin(\frac{x}{a})$.

Quindi si ottiene (aggiungendo la costante additiva C)

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx + C = \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \cdot \arcsin(\frac{x}{a}) + C .$$

Ezio Fornero