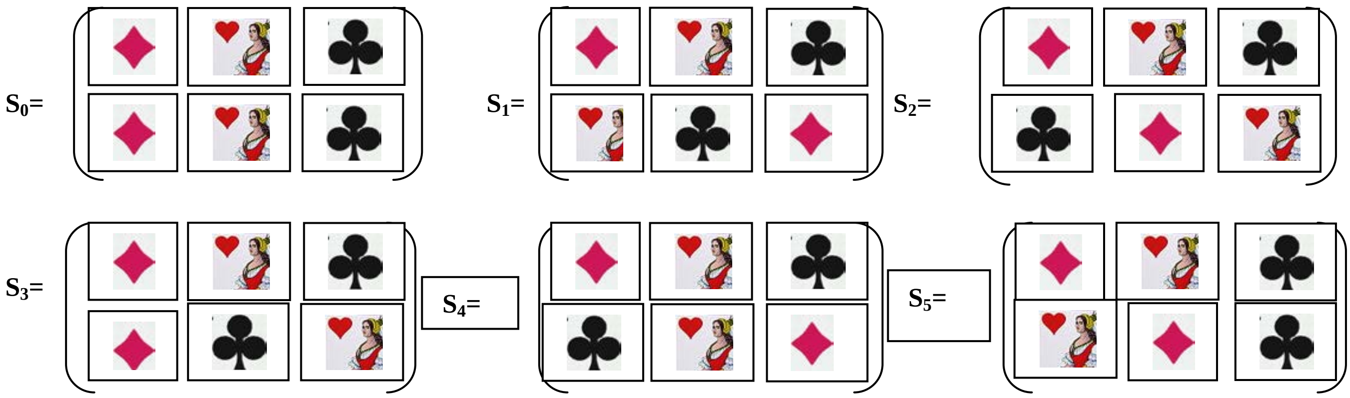
IL GIOCO DELLE TRE CARTE E I GRUPPI

§ 1

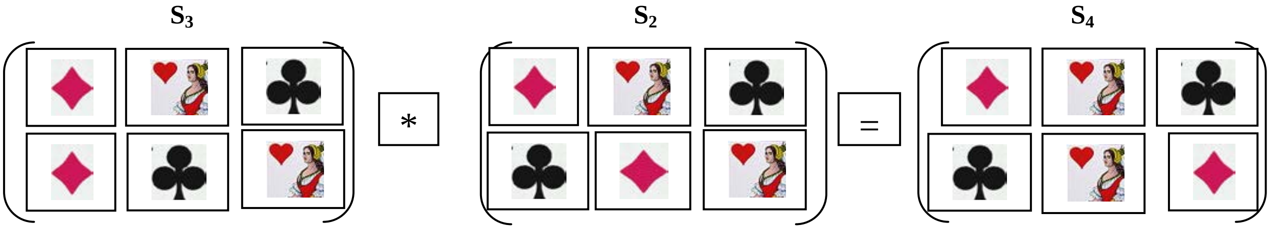
Il concetto di **gruppo** è tra i più fecondi di tutta la matematica. Molteplici sono le sue applicazioni, non solo in matematica e nelle scienze, ma anche in campi diversi e lontani, a prima vista refrattari a una trattazione formale.
Ecco un possibile, accattivante itinerario per la sua introduzione nel biennio della scuola media superiore.

« Venghino siori venghino, che il **gioco delle tre carte** è qui per voi...non c'è trucco non c'è inganno, la donna all'inizio sta in mezzo: la donna vince e gli assi perdono ››. Cominciamo.
Trucchi a parte, in quanti modi *l'onesto croupier* può mescolare, permutare, ordinare le tre carte? La risposta può darla lo *sfortunato docente* di qualsiasi istituto scolastico cui è stato affidato l'ingrato compito di stilare l'orario delle lezioni. Infatti, se a esempio nella terza X, di giovedì, mancano tre insegnanti di materie diverse e sono a disposizione solo tre docenti, *lo sfortunato risponde*: per la prima ora di supplenza posso scegliere in tre modi diversi; per la seconda, per ognuna delle scelte già operate, ho due opzioni e per la terza infine una sola possibilità: in tutto 3*2*1=6 scelte differenti.
Tornaiamo al gioco delle tre carte. Supponiamo che l'ordine iniziale sia:

Dopo essere state permutate, le carte possono trovarsi in una delle sei situazioni indicate sotto. In ciascuna di esse ogni carta della terna in alto è stata *sostituita* dalla carta che le sta sotto nella terna in basso. Denotiamo ordinatamente con $\mathbf{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5}$ le sei sostituzioni (permutazioni) ottenute, il cui insieme è solitamente indicato con $\mathbf{S^3}$ (sostituzioni o permutazioni di tre elementi).



<u>Osservazione</u>
Ogni sostituzione determina una **corrispondenza biunivoca** (o **biiezione**) tra le due terne.
La stessa situazione si presenta se invece di permutare terne di oggetti distinti operiamo con quaterne, cinquine o insiemi di un qualunque numero naturale *n* di oggetti diversi. Ne vedremo in seguito l'importanza.
Giochiamo matematicamente.
Scelte due qualsiasi sostituzioni, definiamo loro "<u>composizione</u>" o "<u>prodotto</u>", la sostituzione ottenuta eseguendole successivamente; l'operazione s'indica con "°", "*", o un altro simbolo scelto. E' consuetudine, nell'indicare il prodotto di sostituzioni – di trasformazioni in genere – scriverle da *destra a sinistra*; a esempio, $\mathbf{S_2}$*$\mathbf{S_3}$ indica il prodotto di $\mathbf{S_3}$ per $\mathbf{S_2}$. Chiariamo cosa intendiamo (utilizziamo le figure di sotto).



- In $\mathbf{S_3}$ l'asso di quadri *rimane al proprio posto*; mediante $\mathbf{S_2}$ l'asso di quadri della seconda terna è *sostituito con l'asso di fior*i, quindi in $\mathbf{S_2 * S_3}$ l'asso di quadri è *rimpiazzato dall'asso di fiori.*

- In **S_3** alla donna di cuori *subentra l'asso di fiori*; questo in **S_2** *è sostituito dalla donna di cuori*, dunque in **S_2*S_3** *la donna di cuori rimane dove si trova*.
- In **S_3** infine l'asso di fiori *viene cambiato nella donna di cuori e questa*, in **S_2**, *è sostituita dall'asso di quadri*; allora in **S_2*S_3** all'asso di fiori subentra l'asso di quadri.

Guardando le tabelle date in precedenza, si scopre che **S_2*S_3= S_4**.
Analogo procedimento per gli altri "prodotti", eseguiti i quali (fidatevi per ora, ma poi applicate come suggerito il procedimento di sostituzione), si nota che:
l'insieme delle sostituzioni del *gioco delle tre carte*, ***S^3***, *è* ***chiuso*** rispetto al *prodotto* "*" su indicato; in altre parole:
*il prodotto di due qualsiasi sostituzioni di **S^3** è ancora una sostituzione di **S^3*** o, come si suole anche dire, la legge "*" è **interna** a ***S^3***, o ancora l'insieme ***S^3*** è **stabile** rispetto all'operazione "*".
In matematica, dato un insieme non vuoto **I** e indicata a esempio con "#" un'operazione interna a **I**, la coppia **(I, #)** si dice una *struttura*. Allora **(S^3,*)** è *struttura*.
Quando viene definita un'operazione fra gli elementi di un insieme, questo è più solo un aggregato dei suoi elementi scollegati fra loro. L'operazione, infatti, connette gli elementi di un insieme come in una rete, la forma delle cui maglie dipende dalle sue particolari proprietà; alcuni elementi – quali *l'elemento neutro* o gli *elementi tra loro inversi* – assumono ruoli particolari: l'insieme nel suo complesso presenta una determinata configurazione (organizzazione), ha una sua struttura.

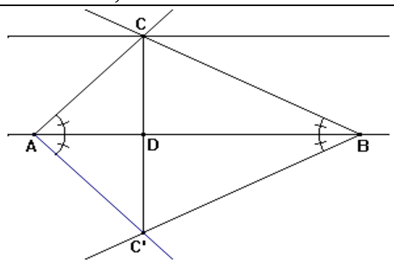
Ne conoscete altre? Si accettano suggerimenti….
(N,+), (N,·), (Z,+), (Z,·), (Q,+), (Q,·), (R,+), (R,·), dove **N**, **Z**, **Q** ed **R** sono rispettivamente le strutture dei numeri naturali, interi relativi, razionali e reali, dotate delle relative operazioni indicate. Spiegate perché.
(N, -), (N, /), (Z, /), (Q^+, $\sqrt{}$) sono strutture? Motivate puntualmente le risposte

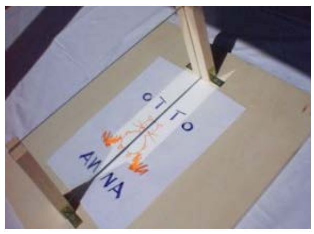
Trasformazioni di un piano

Introduciamo ora strutture i cui insiemi appartengono a un altro ramo della matematica, la geometria. A tale scopo prendiamo le mosse da due esempi che fanno parte dell'esperienza di tutti:

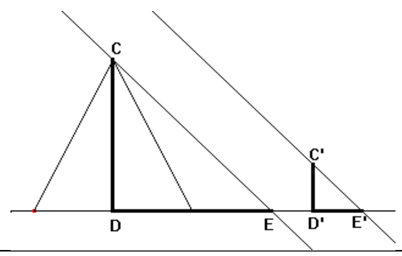
- la riflessione di un oggetto in uno specchio;
- l'ingrandimento di una fotografia.

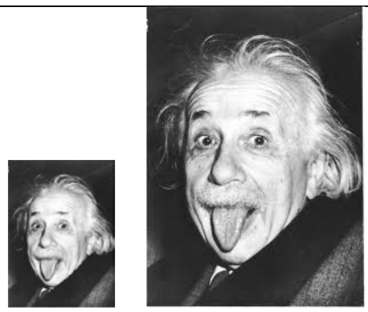
A **Talete** (circa 624-548 a.C.) - primo filosofo-scienziato dell'antica Grecia – si attribuisce il seguente procedimento geometrico per *risolvere problemi reali*: misurare la larghezza di un corso d'acqua o la distanza di una nave dalla riva.
Per il primo caso, prese (vedi figura) due punti **A** e **B** sulla riva di un fiume e, indicato con **C** un punto sulla riva opposta, un cespuglio, un albero o una pietra, pose *idealmente* sulla riva uno specchio perpendicolare al terreno e rivolto all'altra sponda. Riportò sulla riva gli angoli **BÂC** e **A$\hat{B}$C** e ottenne così **C**'immagine speculare, cioè simmetrica rispetto alla retta **AB**, di **C**: la lunghezza del segmento **C'D** è uguale a quella del segmento **CD**, cioè la distanza cercata, poiché nella riflessione, ossia nella simmetria assiale le distanze rimangono invariate.





Nel secondo esempio si attribuisce, ancora a Talete, la determinazione dell'altezza di una torre o di un obelisco (per alcuni storici addirittura di una piramide) mediante la "similitudine". Anche qui *un problema concreto* lo spinse a usare il ragionamento.
Piantato un paletto **C'D'** nel terreno (prima figura sotto) attese che la lunghezza dell'ombra **D'E'** del paletto, proiettata dal sole, fosse uguale alla sua altezza e, misurando la lunghezza dell'ombra della torre o dell'obelisco, risalì alla sua altezza.
In una similitudine rimane in variato il *rapporto* fra lunghezze di segmenti corrispondenti.





In entrambe le situazioni, gli “oggetti” sono stati *trasformati*, ma *sono rimaste inalterate* alcune loro caratteristiche.

“Rinfreschiamo” che nel piano **Π** (o nello spazio **S)** si definisce **trasformazione** ogni *corrispondenza biunivoca* fra i punti di **Π (**o di **S)**.
Sapete già che:
Si chiama **isometria** *ogni* **trasformazione** *tra i punti di un piano* (o di due piani sovrapposti) *che conserva le distanze*.
Cioè tale che, detti **P** e **Q** due **qualsiasi** punti del piano e **P'** e **Q'** nell’ordine gli associati, la **distanza** fra **P'** e **Q'** *è uguale alla* **distanza** tra **P** e **Q**: $\overline{P'Q'} = \overline{PQ}$.

Studierete che:
Si dice **similitudine** *ogni trasformazione tra i punti di un piano che mantiene il rapporto tra segmenti corrispondenti.*
Ossia tale che, detti **P** e **Q** due qualsiasi punti del piano e **P'** e **Q'** rispettivamente i corrispondenti: $\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}}$ = **c**, con **c** costante, o, ciò che è lo stesso $\overline{P'Q'} = c \cdot \overline{PQ}$. A esempio se **c**=2, significa che al segmento **PQ** corrisponde **P'Q'=2 PQ**.
Un semplice esempio è l’ingrandimento fotografico, in cui, se la distanza tra gli occhi dell’ingrandimento è doppia di quella della foto, anche la lunghezza del naso si raddoppia e così pure raddoppia la distanza fra la punta del naso e il lobo di un orecchio, cosicché si riconosce il volto che rappresenta lo stesso soggetto ingrandito del medesimo fattore d’ingrandimento (o di rimpicciolimento) in tutte le direzioni.

Apprenderete in seguito che:
Si chiama **affinità** *ogni trasformazione tra i punti di un piano che conserva l’allineamento e il parallelismo.*
Ciò significa che una retta si trasforma in una retta e che rette parallele hanno per immagini rette parallele.
In questo caso si ha una deformazione diversa dei segmenti a seconda della direzione della retta su cui giacciono.
Un’esperienza comune è quella del profilo di una finestra o di una ringhiera proiettata dai raggi del sole sul pavimento.
Un altro esempio chiaro a tutti è quello di una fascia elastica rettangolare in cui a due lati opposti vengono fissate due astine rigide. Se viene estesa lungo gli altri lati e ruotata di uno stesso angolo in quelli delle astine, un rettangolo disegnato sulla tela si modifica in un parallelogramma; se la figura tracciata è una circonferenza, diventa un’ellisse. Ebbene:

- L’insieme ***I*** delle **isometrie** rispetto alla loro legge di composizione “·” (che dà l’isometria che si ottiene applicandone due successivamente) **è una struttura**: (***I*, ·**). Questo già lo sapete.
- L’insieme **S** delle **similitudini** rispetto alla loro legge di composizione **è una struttura**: (***S*, ·**).
- L’insieme ***A*** delle **affinità** rispetto alla loro composizione **è una struttura**: (***A*, ·**) .

Che queste ultime sono strutture lo potete dimostrare con l’aiuto dei vostri insegnanti.
Anche nel prodotto di trasformazioni è consuetudine indicarle da destra verso sinistra. Così, se consideriamo a esempio due qualunque isometrie σ_1 e σ_2, in quest’ordine, il loro prodotto **σ** s’indica: $\sigma = \sigma_2 \cdot \sigma_1$.

Occupiamoci per ora delle isometrie e rivediamo qualche importante concetto acquisito.

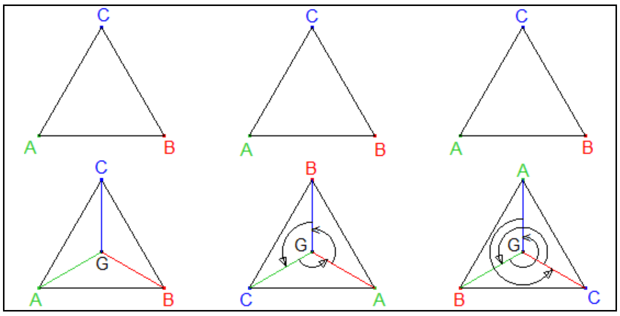
- *Un* ***punto*** *si dice* ***unito*** *in un’isometria* ***se ha per immagine, per associato se stesso***, cioè se è ***fisso nell’isometria***.
  Chiariamo con un semplice esempio. Nella simmetria rispetto all’asse **a** di un segmento - s_a - il punto medio **M** è unito.
- *Una* ***figura*** *si definisce* ***unita*** *in un’isometria* ***se ha per corrispondente se stessa***.
  A tale riguardo chiariamo che: *una figura unita* può non avere *punti uniti*: si dice che è ***globalmente*** *unita*.
  Qualunque circonferenza è **unita** in ogni rotazione attorno al suo centro, ma non ha alcun punto unito.
  Qualsiasi triangolo isoscele è unito nella simmetria rispetto all’asse della base: ha un solo punto unito, il vertice opposto alla base.
  Nella simmetria rispetto a una qualunque retta **a**, questa è *non solo unita*, ma *luogo di punti uniti*.
- Se una figura è formata tutta da punti uniti, si definisce *luogo di punti uniti*.
  Se non ci saranno equivoci ometteremo l’avverbio *globalmente*.

§ 2

Esaminiamo l’insieme $\mathbf{T_E}$ delle isometrie in cui un triangolo equilatero **E** è *figura unita*, ha per immagine se stesso. Allora ogni vertice deve trasformarsi in un vertice, così che il triangolo non muti nel complesso.

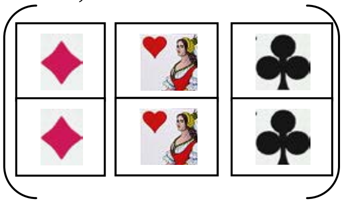
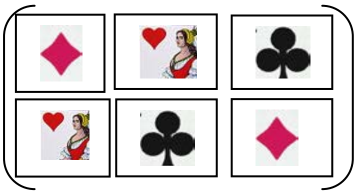
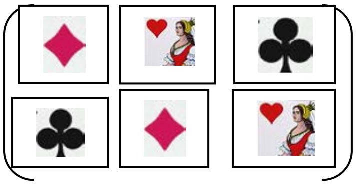
Osservazione
Le isometrie che formano $\mathbf{T_E}$ sono in sostanza le permutazioni dei tre vertici:

1) l’identità **i** (rotazione nulla);
2) la rotazione **r** attorno al suo baricentro **O** di **2/3** di angolo piatto;
3) la rotazione $\mathbf{r^2 = r \cdot r}$ attorno al suo baricentro **O** di **4/3** di angolo piatto.

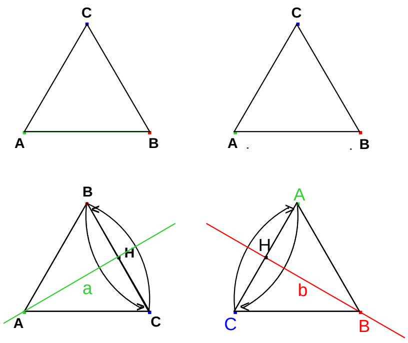


Notiamo che si comportano come le precedenti sostituzioni $\mathbf{S_0}$, $\mathbf{S_1}$, $\mathbf{S_2}$. Infatti:

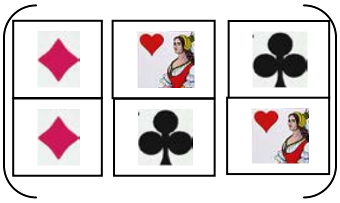
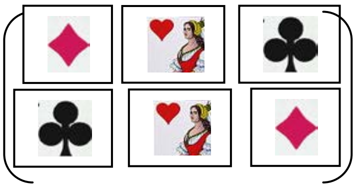
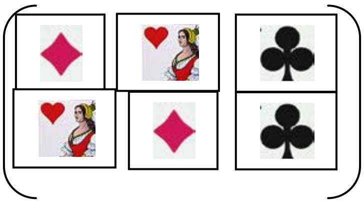
1. Nell'identità i tre vertici non mutano posizione, come in $\mathbf{S_0}$ le tre carte.
2. In **r**, **A** *sostituisce* **B**, che *sostituisce* **C** il quale *prende il posto di* **A**.
3. In $\mathbf{r^2}$, **A** va a collocarsi dov'era **C**, **B** assume la posizione che aveva **A** e **C** prende il posto di **A**.

$\mathbf{S_0}$=  $\mathbf{S_1}$=  $\mathbf{S_2}$= 

Inoltre le simmetrie s_a, s_b, s_c, relative agli assi del triangolo passanti per **A**, **B**, **C**,



che agiscono come le precedenti sostituzioni $\mathbf{S_3}$, $\mathbf{S_4}$, $\mathbf{S_5}$.

$\mathbf{S_3}$=  $\mathbf{S_4}$=  $\mathbf{S_5}$= 

Invero:

4. In s_a **A** rimane fisso (è unito) e **B** e **C** si scambiano, come in $\mathbf{S_3}$.
5. In s_b **B** rimane fisso (è unito) e **A** e **C** si scambiano, come in $\mathbf{S_4}$.
6. In s_c **C** rimane fisso (è unito) e **A** e **B** si scambiano, come in $\mathbf{S_5}$.

$(\mathbf{T_E},\cdot)$ è allora una **struttura**.

Ecco le "tavole pitagoriche" di $(\mathbf{S^3},*)$ e $(\mathbf{T_E},\cdot)$.

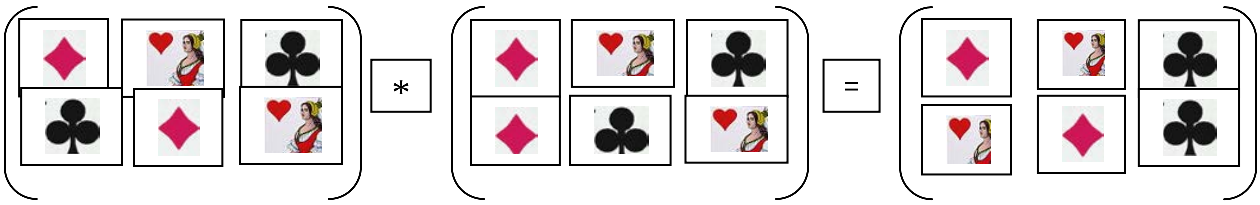
*	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
S_0	$\mathbf{S_0}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	S_3	S_4	S_5
S_1	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{S_0}$	S_4	S_5	S_3
S_2	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{S_0}$	$\mathbf{S_1}$	S_5	S_3	S_4
S_3	S_3	S_5	S_4	S_0	S_2	S_1
S_4	S_4	S_3	S_5	S_1	S_0	S_2
S_5	S_5	S_4	S_3	S_2	S_1	S_0

*	i	r	r^2	s_a	s_b	s_c
i	**i**	**r**	$\mathbf{r^2}$	s_a	s_b	s_c
r	**r**	$\mathbf{r^2}$	**i**	s_b	s_c	s_a
r^2	$\mathbf{r^2}$	**i**	**r**	s_c	s_a	s_b
s_a	s_a	s_c	s_b	i	r^2	r
s_b	s_b	s_a	s_c	r	i	r^2
s_c	s_c	s_b	s_a	r^2	r	i

Una loro attenta osservazione consente di affermare che:
(S^3,*) e **(T_E,·)** hanno lo stesso *modello organizzativo* rispetto alle operazioni di “prodotto” di sostituzioni e “prodotto” d’isometrie.
Insiemi di elementi completamente diversi presentano la stessa struttura, lo stesso schema costruttivo nei riguardi delle rispettive operazioni di composizione. I punti del triangolo si sono “trasferiti” in posizioni diverse, ma il triangolo è lo stesso di prima. È come se in un stesso stampo avessimo colato sostanze diverse: la *forma* non è cambiata. Se astraiamo dalla natura degli elementi i due insiemi sono strutturalmente, operativamente indistinguibili.

Dovreste essere sorpresi non solo da questo fatto, ma anche della circostanza che **(S^3,*)** e **(T_E,·)** hanno lo stesso schema costruttivo di vari insiemi numerici, a esempio **(Q,·)**.
È allora ragionevole chiederci se c’è qualche proprietà della moltiplicazione in **(Q,·)** che vale anche in (S^3,*) e quindi anche in **(T_E,·).**
La moltiplicazione in **(Q,·)** gode, come è noto, della proprietà associativa. Ebbene, anche il “**prodotto**” (*) in (S^3,*) gode della **proprietà associativa**.
Infatti le sostituzioni determinano corrispondenze biunivoche fra le terne che le costituiscono e quindi soddisfano, come sapete, la proprietà in esame. Così pure **(T_E,·)** per le considerazioni precedenti.
E’ naturale chiederci se il “prodotto” di sostituzioni è anche commutativo, ce lo aspettiamo. Verifichiamo, a esempio, se è vero che $S_3*S_2=S_2*S_3$.
Sappiamo che $S_2*S_3=S_4$; calcoliamo S_3*S_2. Con lo stesso procedimento di prima.

S_2 S_3 S_5

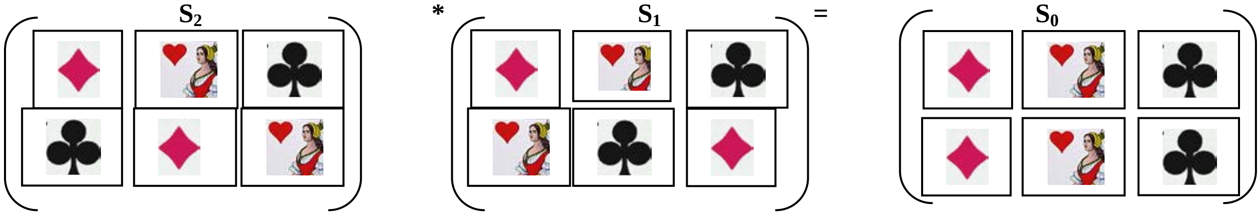


Otteniamo che $S_3*S_2=S_5$: il prodotto di sostituzioni **non** è commutativo**:** *mondo gatto!*
Questo non solo ci indispettisce ma ci fa pensare che l’operazione (*) sia meno importante dell’operazione **(·)** in **Q**.
Non è così come vedremo più avanti.
Proseguiamo nella ricerca di altre eventuali analogie fra “prodotto” di sostituzioni e prodotto di numeri razionali.
Sappiamo che il numero **1** è elemento neutro (o indifferente) del prodotto in **Q**, cioè, scelto un qualunque numero **a:** **a·1=1·a=a**. Esiste una sostituzione fra quelle date che ha la stessa funzione, lo stesso ruolo di **1** nella moltiplicazione fra numeri razionali? Avete qualche idea?
Basta uno sguardo attento alle sostituzioni S_0, S_1,…, S_5, per capire che S_0 nel prodotto di quelle sostituzioni si comporta come **1** nel prodotto fra numeri; infatti, in S_0 l’ordine della terna **1**, **2**, **3** rimane immutato, quindi S_0 non modifica la sostituzione con cui si compone, sia a sinistra che a destra: nel prodotto delle nostre sostituzioni S_0 ha la “parte” di **1**:

$$\forall\ S_i \text{ - con } i=0, 1,\ldots,5 \text{ – si ha: } S_i*S_0= S_0*S_i = S_i.$$

Le analogie non finiscono qui.
Ci è noto infatti che nell’insieme dei numeri razionali *privato dello zero*, Q_0 (o **Q***), scelto un qualsiasi numero **q**, ne esiste uno ed uno solo **1/q** – che s’indica anche con q^{-1} - tale che: $q*1/q =1/q*1=1$, o anche $q\cdot q^{-1}=q^{-1}\cdot q=1$.
Cioè, per ogni numero **q** di Q_0 ($q\neq 0$) ne esiste *uno e uno solo* $q^{-1}=1/q$ che moltiplicato a *sinistra* e a *destra* per **q** dà come risultato l’elemento neutro del prodotto, cioè **l**. Tale numero $q^{-1}=1/q$ si chiama l’inverso (o il reciproco) di **q**.
A questo punto è spontaneo chiederci se il “prodotto” delle sostituzioni precedenti soddisfa anch’esso la proprietà di *esistenza* e *unicità* dell’inverso.
Vediamo allora se, per ogni sostituzione ne esiste una e una sola che composta a *sinistra* e a *destra* con quella data dà come risultato l’elemento neutro dell’insieme S^3, S_0. Esaminiamo a esempio la S_1 e cerchiamo se esiste una delle sostituzioni S_i tale che: $S_i*S_1=S_0$. Utilizzando le tabelle iniziali scopriamo che la <u>sostituzione cercata è la S_2: $S_2*S_1=S_0$.</u>

S_2 * S_1 = S_0



Si verifica poi che anche $S_1*S_2= S_0$; concludiamo che S_2 ed S_1 sono sostituzioni inverse: $S_1= (S_2)^{-1}$ ed $S_2=(S_1)^{-1}$.
Esaminando le inverse delle altre sostituzioni, scoprirete - svolgete i calcoli - che:
$(S_0)^{-1} = S_0$; $(S_3)^{-1} = S_3$; $(S_4)^{-1} = S_4$; $(S_5)^{-1} = S_5$.
Quello che abbiamo trovato ci assicura che <u>ogni sostituzione ammette l’inversa</u>.

Giochi a parte, consideriamo l'insieme delle sostituzioni di tre oggetti – S^3={S_h, con **h=0,1,….,5**} – dotato dell'operazione di composizione di due suoi qualunque elementi nel modo su indicato; possiamo dire che la struttura (S^3,*) soddisfa le proprietà:

1. S^3 è **chiuso (o stabile)** rispetto all'operazione **(*), cioè l'operazione (*****) è interna** a S^3.
   Ciò significa che il prodotto di due qualsiasi sostituzioni di S^3 è ancora una sostituzione di S^3: $\forall\ S_i, S_j \in S^3$ $S_j{*}S_i \in S^3$.
2. **L'operazione (*) gode della proprietà associativa:**
   $\forall\ S_i, S_j, S_k \in S^3$: $S_k{*}(S_j{*}S_i)= (S_k{*}S_j){*}S_i=S_k{*}S_j{*}S_i$.
3. **Esiste un'unica sostituzione - S_0 – che composta a sinistra e a destra con una qualunque delle sostituzioni S_h, dà per prodotto S_h: $S_0{*}S_h = S_h{*}S_0 = S_h$.**
   S_0 si definisce per ciò elemento neutro (o indifferente) dell'insieme S^3 rispetto all'operazione (*).
4. **Assegnata una qualunque delle sostituzioni S_h ne esiste una e una sola – s'indica S_h^{-1} - che composta con S_h, a sinistra e a destra dà come prodotto l'elemento neutro S_0:** $S_h^{-1}{*}S_h=S_h{*}S_h^{-1}= S_0$.
   S_i ed S^{-1} si dicono sostituzioni simmetriche (o inverse, poiché la notazione usata per l'operazione è quella moltiplicativa).

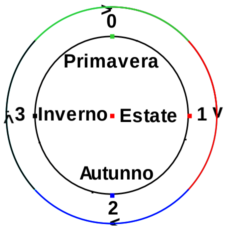
§ 3

Vedremo la straordinaria importanza delle precedenti proprietà del *gioco delle tre carte* nelle situazioni più disparate.
Per ciò, astraendo da ogni caso particolare diamo la definizione:
Si chiama ***gruppo*** *un qualunque insieme* ***G*** *non vuoto, munito di una operazione " • " - (**G, •**) - che soddisfa le seguenti proprietà* :

1. G è chiuso rispetto all'operazione**:** $\forall\ a, b \in G\ \ a•b \in G$. (Si legge **a composto b** o **a per b**).
2. L'operazione è associativa: $\forall\ a, b, c \in G\ \ (a•b)•c=a•(b•c)=a•b•c$.
3. Esiste l'elemento neutro ***e***, tale che $\forall\ a \in G\ \ a•e=e•a=a$. •
4. Ogni elemento ***a*** ammette il simmetrico, a^{-1}, tale che $\forall\ a \in G\ \ a•a^{-1}=a^{-1}•a=e$.

Se in **G** l'operazione presenta la notazione moltiplicativa, (*) o (•), il simmetrico si chiama anche inverso, se invece si usa il simbolo additivo (+) , il simmetrico prende il nome di opposto. Di norma si usa la notazione moltiplicativa.
Un gruppo *(**G,•**)* n cui l'operazione di *composizione* gode anche della proprietà commutativa si suole chiamare *gruppo commutativo* o *abeliano*. In tale caso spesso ci si serve della notazione additiva "+".
L'aggettivo *abeliano* è usato in onore di **Niels Abel**, giovane e sfortunato matematico norvegese, che ha contribuito all'elaborazione del concetto di gruppo.

Esempi di gruppi un poco "strani".
Consideriamo l'*insieme* ***S*** *delle quattro stagioni* e numeriamole, seguendo il loro naturale succedersi, da **0** – *primavera* – a **3**, *inverno*.
Diciamo "somma" di due qualunque di esse la stagione rilevata nel ciclo addizionando al numero corrispondente alla prima quello associato alla seconda; se c'è l'estate – 1- dopo due stagioni sarà inverno, infatti **1+2=3**. Ma se, partendo sempre dall'estate pensiamo di fare passare tre stagioni, ci troveremo in primavera:
1+3=0! Uno e tre sono numeri opposti dato chela loro somma è zero. Così pure **2+3=1**, **3+3=**2, e così via.
Sotto la "tavola pitagorica" completa e al suo fianco la tabella *dell'insieme delle rotazioni* ***ρ*** *di un quadrato, attorno al suo centro di simmetria* che trasformano il quadrato in se stesso, **(ρ,°).** Notiamo che hanno la **stessa configurazione.**
Analogamente, se consideriamo l'insieme dei giorni della settimana e quello delle note musicali, numerandoli da 0 a 6, otteniamo che **1+6=0**, **3+4=0**, **2+6=1**.



+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

°	i	r	r^2	r^3
i	i	r	r^2	r^3
r	r	r^2	r^3	i
r^2	r^2	r^3	i	r
r^3	r^3	i	r	r^2

E ancora, esaminando l'insieme le ore del giorno e quello dei mesi dell'anno, numerati da 0 a 11, abbiamo a esempio che: **3+9=0**, **5+7=0**, **6+9=3**, **4+10=2**.
Tutti gli insiemi considerati con le "operazioni" assegnate formano dei gruppi commutativi.
Dal gioco delle tre carte ai mesi dell'anno, passando per le note musicali, i **gruppi** sono sempre presenti. È un caso, o abbiamo scoperto un modo particolarmente significativo di "organizzare" gli elementi di un insieme?
Per accertarcene proseguiamo.

Osservando con attenzione le tabelle precedenti, ci rendiamo conto che le due strutture **(S,+)** e **(ρ,°)** sono gruppi abeliani**.** Inoltre, astraendo dalla natura dei loro elementi e dal tipo di "operazione", le due strutture sono indistinguibili.
Andiamo avanti e consideriamo i seguenti insiemi

- **K** delle isometrie in cui un rettangolo è unito, ossia si trasforma in se stesso. Chiamiamo $\mathbf{s_a}$, $\mathbf{s_b}$ ed $\mathbf{s_O}$ rispettivamente le simmetrie rispetto alle rette **r** e **s** che passano per i punti medi delle coppie di lati opposti e la simmetria di centro **O**, punto d'incontro delle diagonali; denotiamo inoltre **i** l'identità.
  Verificate che, indicato con "**•**" il prodotto di isometrie**, (K,•)** è un gruppo commutativo che si chiama gruppo trirettangolo o di **Klein**.

*	i	s_r	s_s	s_O
i	i	s_r	s_s	s_O
s_r	s_s	i	s_O	s_s
s_s	s_s	s_O	i	r_r
s_O	s_O	s_s	s_r	i

- Sia **J** l'insieme delle seguenti "operazioni" che si possono compiere su un paio di jeans: (Quest'esempio è tratto dal libro *L'equazione impossibile* di Mario Livio).
  1 I: lasciare i jeans nella situazione in cui sono.
  2 A: girare i pantaloni dietro-avanti
  3 B: rovesciare i jeans dentro-fuori.
  4 C: girare i pantaloni dietro-avanti e rovesciarli dentro-fuori.

Definiamo *composizione* di due delle precedenti operazioni, denotata con (°), quella che si ottiene semplicemente con «seguito da». Se verifichiamo, scopriamo che l'insieme delle quattro operazioni descritte con la composizione assegnata forma un *gruppo commutativo*, che ha la stessa struttura di quello precedente; quella a fianco è la tabella.

°	I	A	B	C
I	I	A	B	C
A	A	I	C	B
B	B	C	I	A
C	C	B	A	I

Due gruppi che presentano rispetto alle relative operazioni la stessa struttura si dicono **isomorfi** (cioè con la stessa forma, ossia sono configurati, organizzati alla stessa maniera nei riguardi delle rispettive operazioni).
Da quello che abbiamo appreso **sono isomorfi**:

- Il gruppo $\mathbf{S^3}$ delle permutazioni di tre elementi (in origine le nostre carte) e quello $\mathbf{T_E}$ delle isometrie in cui un triangolo equilatero **E** è *figura unita*.
- Il gruppo *S delle quattro stagioni* e quello delle *rotazioni* $\boldsymbol{\rho_O}$ *di un quadrato, attorno al suo centro di simmetria O*, che trasformano il quadrato in se stesso.
- Il gruppo **K** delle isometrie in cui un rettangolo è unito e quello delle su indicate "operazioni" su un paio di jeans.

Importantissimo
In un gruppo **(G,•)** è possibile risolvere l'equazione generale di primo grado **a•x=b**. Infatti in essa, moltiplicando a sinistra per l'inverso di **a**, $\mathbf{a^{-1}}$, otteniamo:
$\mathbf{a^{-1} \bullet a \bullet x = a^{-1} \bullet b}$ che, per la proprietà associativa, diventa $\mathbf{(a^{-1} \bullet a) \bullet x = b}$ dalla quale, per la 4. dei gruppi, abbiamo $\mathbf{e \bullet x = a^{-1} \bullet b}$ che infine per la 3. dà $\mathbf{x = a^{-1} \bullet b}$.
In **(Q,•),** l'equazione -2x=5 si risolve moltiplicando ambo i membri per l'inverso di -2, cioè -1/2: (-1/2)(-2x)= (-1/2)5, che, per la proprietà associativa della moltiplicazione diventa (-1/2)(-2)x= -5/2, ossia 1x=-5/2, e infine x=-5/2.
Osservate che per risolvere l'equazione generale di primo grado in un gruppo non è necessaria la proprietà commutativa dell'operazione del gruppo, *è indispensabile invece la proprietà associativa*.
Qual è il"*più piccolo*" gruppo numerico rispetto all'*inclusione* che permette di risolvere l'equazione generale di primo grado? Cercatelo.

Prima di esporre alcuni significativi esempi di applicazioni della *Teoria dei gruppi* sia in matematica sia in altri campi, desideriamo rendere omaggio al suo ideatore, il precocissimo genio francese di **Evariste Galois** (1811-1832). A soli vent'anni ha regalato al mondo il concetto di **gruppo**, uno strumento semplice, potente e generale che ha consentito risultati importantissimi in varie discipline scientifiche e non.
L'insegnante commenterà i seguenti punti, arricchendoli o sostituendoli.

- Ricerca dell'esistenza di formule risolutive delle equazioni algebriche (*Galois*).
- Cristallografia (*Bravais*)
- Classificazione delle geometrie (*Klein*).
- Codici e decifrazione.
- Telecomunicazioni: codici di correzione per le trasmissioni.
- Giochi: del quindici, cubo di Rubik,….
- Grammatiche e linguaggi che sono usati anche nei computer (*De Saussure*, *Thule, Chomski*)

L'insegnante valuterà l'opportunità e le modalità di esporre le successive considerazioni.
Infine, vogliamo proporre alla vostra attenzione due straordinarie applicazioni della *Teoria dei gruppi* a campi d'indagine la cui esplorazione è avvenuta solo nel secolo scorso:

- Uno è quello delle particelle elementari e delle forze fondamentali della natura.
- L'altro si riferisce alla relatività speciale (o ristretta) di **Einstein**.

Data la straordinaria difficoltà degli argomenti, essi possono solo essere sfiorati. Ma ciò che vogliamo evidenziare è che anche in essi la *Teoria dei gruppi* svolge un ruolo fondamentale.

Primo campo
Nel secolo passato i fisici hanno elaborato una teoria, chiamata **Modello Standard**, che vuole descrivere sia la materia che le forze dell'Universo. La bellezza di tale teoria risiede nella capacità di descrivere tutta la materia sulla base di poche *particelle* e *interazioni (forze) fondamentali*, **gravitazionale**, **elettromagnetica**, **nucleare debole**, **nucleare forte**.

- La prima si esercita tra due qualunque particelle nell'universo.
- La seconda si manifesta fra particelle cariche ferme o in moto.
- La forza **nucleare debole –** circa *un millesimo* di quella elettromagnetica **–** ha un piccolissimo raggio d'azione, minore di $\mathbf{10^{-16}}$cm. Si presenta nei decadimenti radioattivi.
- L'interazione **nucleare forte** fu così definita perché è la più forte tra le quattro interazioni fondamentali della natura. Il suo valore è circa **100** volte quello della forza elettromagnetica, circa $\mathbf{10^5}$, centomila volte maggiore della forza debole e $\mathbf{10^{39}}$ volte quello della gravità. Ha raggio d'azione minore di $\mathbf{10^{-13}}$cm ed è quella che tiene uniti nel nucleo i protoni i quali, avendo carica positiva si respingono e quindi lo disintegrerebbero. Fu originariamente ipotizzata da **Enrico Fermi** nel 1933.

Nel *1687* **Newton** pubblica *Philosophie Naturalis Principia Mathematica*, opera che costituisce un monumento di carattere scientifico-folosofico. In essa riconduce a un'unica causa le leggi dei moti della terra - la caduta dei gravi - e quelle dei moti del cielo – orbite dei corpi celesti - compiendo così la prima grande unificazione tra leggi fisiche. Intorno al *1860* **Maxwell** aveva *unificato* la **forza elettrica** e quella **magnetica** nella **forza elettromagnetica**, di cui quelle sono due modi di manifestarsi.
Alla base della formulazione del Modello standard viene posto un *principio di simmetria*, inteso nel senso più ampio di *invarianza*. Questo principio consiste nell'ammettere che la teoria proposta risulti **invariante** rispetto a opportune trasformazioni; esse formano particolari gruppi, detti **gruppi continui di Lie** (1874). Tra questi sono particolarmente interessanti il *gruppo delle rotazioni di un cerchio e quello di una sfera attorno ai propri centri*.
Nel **1968**, **Glashow**, **Salam** e **Weinberg** utilizzarono alcuni gruppi di Lie per formulare la cosiddetta *teoria elettrobebole*, che <u>ha unificato</u> la <u>forza elettromagnetica</u> e la <u>forza nucleare debole</u>, - le quali sono due modi di manifestarsi di un'unica forza detta **elettrodebole**. La teoria elettrodebole prevedeva l'esistenza di due nuove particelle chiamate **W** e **Z**. Per tale teoria furono insigniti del *Premio Nobel* nel **1979**. Le particelle **W** e **Z** furono scoperte sperimentalmente nel **1983** da **Rubbia** e **Van der Meer** che per ciò ricevettero il *Premio Nobel* l'anno successivo.
Attualmente si stanno cercando ulteriori unificazioni delle interazioni fondamentali.

Secondo campo

Durante la seconda metà del XIX secolo i fisici si trovarono di fronte a una grave difficoltà:

- Da un lato le leggi della dinamica di Newton soddisfacevano il principio d'invarianza galileiana, erano cioè valide in tutti i sistemi di riferimento inerziali, ossia che si muovono di moto rettilineo uniforme.
- Dall'altro le equazioni dell'elettromagnetismo di Maxwell erano valide solo in opportuno sistema di riferimento e si era costretti a fare diverse ipotesi *ad hoc*, cioè specifiche.

Ciò era comunque insoddisfacente perché a ben riflettere, come si fa a distinguere i sistemi meccanici da quelli elettrici? Tutta la materia è composta da particelle cariche, tenute unite da forze elettriche. Perciò, tutti i sistemi meccanici implicano particelle *cariche* e tutti i sistemi elettrodinamici comportano il moto di particelle che hanno *massa*.
Allora *tutte* le leggi fisiche devono essere le stesse in *tutti* i sistemi di riferimento inerziali: doveva essere sfuggito qualche aspetto essenziale del problema. La risoluzione di questo dilemma ha condotto alla formulazione e allo sviluppo della rivoluzionaria teoria della *relatività speciale* o *ristretta*, formulata da **Einstein** nel 1905.
Tale teoria *assorbiva* le *Trasformazioni galileiane*, sostituendole con le *Trasformazioni di Lorenz*.
<u>La teoria della *relatività speciale* unifica *meccanica ed elettromagnetismo*</u>.
Quello che vogliamo mettere in rilievo è che: le *Trasformazioni di Lorenz* formano un **gruppo**, anzi un **gruppo abeliano** che è sottoinsieme (sottogruppo) di trasformazioni più generali, dette *Trasformazioni di Poincaré* che costituiscono un **gruppo**.

Speriamo, con quanto scritto a partire dal gioco delle tre carte, di avere chiarito la straordinaria importanza del concetto di gruppo.

Alfio Grasso