PROPOSTA DIDATTICA PER UN *DIVERSO* SVILUPPO DELLA GEOMETRIA CON L'USO *STRUTTURALE* DELLE ISOMETRIE.

Per chiarire la metodologia che sta alla base dell'esposizione, è opportuno prendere l'avvio dal resoconto del professore **Villani** relativo al *Congresso internazionale di Cagliari sull'insegnamento della geometria del* **1981**; in esso si legge:

1. «Di geometria ne va insegnata parecchia, a tutti i livelli di scolarità; più di quanto si usa attualmente (*da allora la geometria è stata ancora di più trascurata!,* il corsivo è mio).
2. Occorre distinguere diversi stadi di apprendimento degli allievi e, in ogni stadio, si devono riprendere e rielaborare le nozioni dello stadio precedente e preparare il terreno agli sviluppi previsti nello stadio successivo.
3. Nella fase intermedia fra l'insegnamento "sperimentale" della scuola elementare e media e l'insegnamento "razionale" degli ultimi anni di scuola secondaria superiore, occorre prevedere uno stadio di ***avvio*** al metodo di deduzione. *Poiché l'assiomatica di* **Euclide-Hilbert** *è troppo complessa e quella vettoriale troppo astratta, ci si limiterà in questo stadio a familiarizzare gli allievi su parti circoscritte ma significative della geometria.*
   In quest'ottica l'insegnante deve possedere un'assiomatica sottostante intuitiva, semplice, dagli assiomi forti – tali cioè da consentire sin dall'inizio un rapido accesso a teoremi interessanti e non immediati – ma intuitivi in quanto traducono proprietà dello spazio che ci circonda, facili a verificarsi (a esempio, *l'Assiomatica a base metrica* proposta da **Choquet** già nel 1959 e utilizzata nei testi di **Prodi**, **Lombardo Radice** e **Mancini Proia**, **Belli** e **Lupo Perricone** e **Pagni** e **Pallini**).
4. La strutturazione delle conoscenze in teorie organiche deve essere l'obiettivo finale di tutta l'attività didattica, ma **non** ne può costituire in alcun modo il punto di partenza.

Gli *Elementi* di **Euclide**, *summa* della matematica fino al 300 a.C. circa, hanno costituito per due millenni il paradigma perfetto di sistema ipotetico-deduttivo, che ha influito fortemente sulla matematica e sulle scienze in genere (**Spinoza** lo usò addirittura per… provare l'esistenza di Dio).
Il trattato euclideo è in effetti la sintesi creativa del lavoro compiuto da parte dei matematici greci, a partire da **Talete** (VI secolo a.C.), i cui importanti risultati erano conseguenza più dello sforzo euristico che del rigore dimostrativo.
In essi, come in tutta la letteratura scientifica greca a eccezione de *Il Metodo* di **Archimede** (scoperto casualmente nel 1906), non v'è traccia di tutto il lavorio che ha portato a *scoprire* e *congetturare* le varie proprietà, che sono state **poi** tradotte in dimostrazioni. Queste sono svolte in modo razionalmente perfetto, ma con costruzioni e procedimenti talora artificiosi - *legati al caso specifico* - senza l'indicazione di alcun metodo generale che possa servire da guida per la dimostrazione affrontata e per altre.
Gli *Elementi* **non** costituiscono quindi un testo scritto a scopo didattico.
Archimede, pur essendo l'ideatore di dimostrazioni che sono un modello di rigore malgrado la straordinaria complessità, chiarisce ne *Il Metodo* che:
la matematica, non è solo rigore, è *prima ancora e maggiormente* intuizione, formulazione di congetture plausibili, ottenute anche mediante esperienze reali o ideali.
Questo il pensiero del matematico tra i più grandi di sempre: sarebbe opportuno farne tesoro.
Leibniz, intorno al **1700**, scoprì una crepa nella maestosa architettura del genio di Alessandria: **neppure** la prima proposizione degli *Elementi* si poteva dedurre dai **cinque** assiomi euclidei. E **Schopenhauer**, più di un secolo dopo, notò che anche la quarta proposizione – il cosiddetto primo criterio di congruenza dei triangoli – **non** era dimostrabile con gli assiomi degli *Elementi*:
Il sistema assiomatico di Euclide *non era completo*, cioè non consentiva di dimostrare tutte le proposizioni vere della geometria.
Hilbert aveva come programma filosofico-scientifico quello di provare *coerenza* (*consistenza*), cioè non contraddittorietà, e *completezza* della matematica. Per ovviare alle lacune degli *Elementi* ne propose nel **1899** una edizione riveduta e corretta, i *Fondamenti della Geometria*, che contenevano

ben **ventuno(!)** assiomi. Inoltre, per evitare che in futuro qualcuno facesse le pulci ai *Fondamenti*, dimostrò che il suo sistema assiomatico *era completo*.
Per quel che riguarda i *Fondamenti*, gli intenti di Hilbert erano, come si è detto:

1. Rivedere, correggere e completare gli *Elementi*.
2. Stimolare i matematici a cimentarsi nella ricerca della *completezza* e *coerenza* della matematica di cui fermamente convinto.

Purtroppo per lui, nel 1930-31, **Gödel**, con i teoremi di *incompletezza*, mise fine all'illusione razionalista che la matematica potesse dimostrare la propria coerenza.
Anche i *Fondamenti* **non** sono quindi un libro di testo scolastico.

Intorno al 1830 **Bolyai** e **Lobačevskij** introdussero, indipendentemente, la geometria non euclidea detta *iperbolica* (**Gauss** nei primi anni del 1800 era giunto a conclusioni simili, ma non le aveva pubblicate «per evitare le risa dei beoti», per dirlo con le sue stesse parole). Inoltre, nello stesso periodo, il precocissimo genio di **Galois** ideò la *Teoria dei gruppi* che ha assunto una straordinaria importanza sia in matematica sia nelle scienze applicate, in fisica delle particelle elementari dopo l'introduzione dei Gruppi continui di di **Sophus Lie**. Nel 1854 **Riemann** propose un'altra geometria non euclidea, quella *ellittica*, che servirà da modello per la *Relatività generale.*
Queste idee innovative culminarono nel *Programma di Erlangen* di **Klein** del **1872**. In esso egli propose, e la comunità scientifica fece proprio che:
"**Una** geometria è lo studio delle proprietà che rimangono *invariate* quando si sottopone il piano (lo spazio) a un *gruppo di trasformazioni*".

Nel **1915** la scienziata **Emmy Noether** fuse simmetrie, nel più ampio senso moderno di *trasformazioni invarianti rispetto a determinate caratteristiche*, e *leggi di conservazione*, e dimostrò che **a ogni simmetria *continua*** corrisponde *una legge di conservazione e viceversa*:

- La simmetria per traslazione corrisponde alla conservazione della quantità di moto.
- La simmetria rispetto al tempo corrisponde alla conservazione dell'energia.
- La simmetria per rotazione corrisponde alla conservazione del momento angolare, cioè del momento della quantità di moto.

I nostri testi di geometria invece, hanno seguito e seguono il metodo di Euclide-Hilbert, con rarissime eccezioni, come quelle prima segnalate e il libro di **Morin** e **Busulini** (1960), tra i pochi citati anche nelle bibliografie di autori stranieri.
(Nei libri di testo le trasformazioni sono presentate dopo avere svolto la geometria in modo tradizionale e diventano così un'incomprensibile, pesante e inutile sovrastruttura).

Presento a questo punto alcune considerazioni sull'opportunità dell'uso *strutturale* delle trasformazioni nello studio della geometria. Talune sono tratte dal citato resoconto del professore Villani, altre, più modestamente, sono frutto della mia personale esperienza e riflessione.

- L'impostazione tradizionale pone l'accento su situazioni "locali", su singole figure delle quali studia alcune proprietà, con metodi ingegnosi ma legati a casi specifici, quindi non estensibili allo studio ed alla classificazione di altre figure di tipo più generale. Con le trasformazioni invece è coinvolto tutto l'ambiente in cui si opera (piano o spazio), e l'attenzione si sposta dalle "figure" alle loro "proprietà". Ciò permette una maggiore generalità, sistematicità e unitarietà di metodi per lo studio e la classificazione delle figure.
- Il nuovo assetto logico-deduttivo, che utilizza *sistematicamente* le trasformazioni geometriche, propone un numero ridotto di assiomi (**7**) semplici, intuitivi e forti.
- Altro punto di forza delle trasformazioni risiede nella loro struttura di gruppo (non commutativo), che consente di fornire significativi esempi di gruppi non numerici e loro sottogruppi abeliani e non. La struttura di gruppo è ricca di conseguenze e favorirà, nel seguito degli studi, l'introduzione degli spazi vettoriali. Inoltre l'uso delle trasformazioni geometriche permette di svolgere dimostrazioni "algebriche" in geometria.

- Ancora, nelle trasformazioni geometriche è fondamentale la ricerca dell'*invariante* che è uno degli strumenti basilari dell'indagine scientifica. In Fisica a esempio leggi fondamentali sono quelle di conservazione, cioè d'invarianza. Inoltre la ricerca degli invarianti stimola i procedimenti euristici che sono fondamentali per l'apprendimento. E ancora lo studio delle proprietà che rimangono costanti permette di ampliare gli insiemi in cui si opera, passando dal gruppo **I** delle isometrie al gruppo **S** delle similitudini, $\mathbf{I} \subset \mathbf{S}$, al gruppo **A** delle affinità, $\mathbf{I} \subset \mathbf{S} \subset \mathbf{A}$, al gruppo **P** delle proiettività, $\mathbf{I} \subset \mathbf{S} \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{P}$, così come in algebra $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, evidenziando una maggiore unitarietà nello studio della matematica.
- Altro punto significativo dell'uso delle trasformazioni geometriche e della nuova impostazione assiomatica sta nella possibilità di utilizzare rapidamente i suggestivi e potenti metodi della geometria analitica la cui importanza è evidente e indiscutibile e trova immediata applicazione allo studio della Fisica che in certi istituti inizia già al primo anno.
- Infine, ma non per ultimo, nello spazio l'assioma di simmetria rispetto a un piano permette, in maniera immediata, l'introduzione della perpendicolare da un punto a un piano e le sue importanti conseguenze estese ai piani perpendicolari. Mentre nella trattazione tradizionale devono essere premessi vari teoremi, tra i quali quello "delle tre perpendicolari" è complesso già nell'enunciato. Anche la traslazione poi rende immediate alcune dimostrazioni.

Dopo queste premesse traccio il percorso che seguirò, prendendo le mosse…..dalla preistoria.
Già l'uomo primitivo, per spostarsi da un posto (punto) a un altro più rapidamente possibile, così da sfuggire a un predatore o giungere per primo a una fonte di cibo, *ha scelto "naturalmente" il tragitto di lunghezza minima* fra i percorsi che li congiungono: quello *rettilineo tra i due luoghi* (utilizzeremo impropriamente il termine lunghezza come sinonimo di misura, perché chiaramente intuitivo). Noi lo chiamiamo segmento che congiunge i due punti. L'umanità ha poi tradotto in termini matematici la molteplicità delle sue esperienze in tali situazioni nel concetto di distanza tra due punti, come la *misura del percorso rettilineo fra essi*:
questa la prima idea fondamentale nel "piano" della savana.
L'idea della lunghezza **segmento** è legata quindi all'attività umana primitiva. Un ramo lungo, solido e appuntito divenne uno strumento di difesa e offesa, un tronco d'albero di lunghezza conveniente, fatto cadere tra le due rive di un ruscello, consentì di superare quest'ostacolo, e ancora dei tronchi di opportune dimensioni divennero pilastri per le palafitte e pareti delle capanne, ecc.
Negli *Elementi* di Euclide, il *terzo* dei ventitré "termini" afferma: « Estremi di una linea sono punti».
Poi i postulati **1** e **2** asseriscono:

1. «Che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto a ogni altro punto»
2. «E che una *retta* si possa continuamente prolungare in linea retta».

Anche per Euclide quindi, concetto basilare è il percorso rettilineo fra due punti, *cioè quello che noi chiamiamo segmento*, non l'idea di retta che è una postulazione successiva. Ed è la "retta terminata" – il segmento – che utilizza nel resto degli *Elementi*. Il secondo postulato poi esprime il concetto aristotelico d'infinito in potenza che ha dominato in matematica fino alla seconda metà del XIX secolo, con *l'infinito in atto* di **Cantor**, e usato già, intuitivamente, da Galilei nel moto parabolico.

Importanza della simmetria speculare nella Natura.
*In principio fu la **simmetria**.*
Secondo il *Modello standard* infatti, dopo circa $\mathbf{10^{-32}}$ secondi dal **Big Bang**, comparvero *particelle* e *antiparticelle*.
Successivamente, circa **400.000** anni dopo il Big Bang, emerse la luce, che si comporta come se "*annusasse*" i percorsi e scegliesse quello in cui impiega il tempo minimo e fa il percorso più breve per andare da un punto a un altro: *la riflessione della luce* è infatti una legge di simmetria.
Poi, nel corso dell'evoluzione la Natura, circa **600** milioni di anni fa, escogitò la simmetria bilaterale e si accorse che essa era una strategia vincente perché "economica": *due al prezzo di uno.*
E la simmetria *bilaterale* o *speculare* si manifesta in Natura sia nel campo *microscopico* – a esempio nelle strutture delle molecole delle sostanze cristalline - sia in quello *macroscopico* e nei

mondi minerale, vegetale e animale, in quest'ultimo in particolare. Ciò non si può attribuire al caso. Infatti, gli animali sono aggregati di miliardi di miliardi di molecole, ed esistono certo modi infinitamente più numerosi di costruire con esse strutture asimmetriche piuttosto che simmetriche.
L'uomo, suggestionato dal senso di armonia di certe configurazioni presenti in natura, è stato indotto, fin dai tempi più antichi, a riversare l'osservazione delle figure con tali caratteristiche nelle creazioni artistiche. E invero molti esempi di *simmetrie* (e anche di *traslazioni* e *simmetrie centrali*), utilizzate in modo matematicamente non consapevole, si trovano già in *graffiti del paleolitico e del neolitico* e poi nei capolavori di tutti i tempi e di tutte le civiltà. Inoltre, stano ma vero, *simmetrie* e *traslazioni* sono utilizzate e associate a regole ben precise in musica, si in musica! Esse sono chiamate, a seconda delle caratteristiche presentate: *ritardi o anticipazioni*, *trasposizioni*, *moto retrogrado, inversioni melodiche*, che costituiscono le solide basi delle maestose architetture delle opere dei grandi compositori del passato come **Vivaldi**, **Bach**, **Mozart**, **Behetoven**, **Händel**, **Debussy**, per citarne alcuni, e anche in quelle del presente, **Battisti** e **Battiato** a esempio**.**

I concetti fondamentali sono allora distanza fra due punti e simmetria bilaterale.
Il sistema assiomatico utilizzato introduce da subito la continuità, che può essere presentata in maniera didatticamente semplice, basandosi sull'esperienza comune, come illustrato nell'appendice. Introdotta la simmetria assiale proponendone significative immagini e presentando progetti con software dinamici, gli assiomi, sottintesi (**meglio**) o presentati sin dall'inizio, sono i seguenti.

ASSIOMA I (d'incidenza)
Per ogni coppia di punti distinti esiste una retta ed una sola cui appartengono. (Oppure, più solitamente) *Per due punti distinti passa una ed una sola retta*.
ASSIOMA II (di Euclide)
Per ogni retta **r**, *e per ogni punto* **P** *esiste una ed una sola retta per* **P** *parallela ad r*. (O anche)
*Per un punto si può condurre una ed una sola retta parallela a una retta***.**
ASSIOMA III (di ordine)
Ogni retta è dotata di due relazioni d'ordine totale, una opposta all'altra.
ASSIOMA IV (di partizione)
Data nel piano **π** *una retta* **r**, *l'insieme complementare di* **r** *rispetto a* **π** *è suddiviso in due sottoinsiemi, detti semipiani aperti, dotati di infiniti punti e tali che*:
- *il segmento che congiunge due qualunque punti di uno stesso semipiano aperto non interseca* **r**;
- *il segmento che congiunge due qualsiasi punti di semipiani aperti opposti incontra* **r.**

ASSIOMA V (della distanza)
A ogni coppia di punti **(A,B)** *del piano è associato un numero reale* **r≥0,** *detto* **distanza** *tra* **A** *e* **B**, *che indichiamo con* $\overline{AB}$ *, con le seguenti proprietà*:
- $\overline{AB}$ =**0** se e solo se **A≡B**;
- per ogni coppia di punti (A,B), $\overline{AB} = \overline{BA}$ (proprietà simmetrica della distanza);
- assegnati una semiretta **s** di origine **O** ed un numero reale **r≥0**, su **s** esiste *uno ed un solo* punto **P** tale che $\overline{OP}$ =**r** (continuità);
- per ogni terna di punti {**A**, **X** e **B**} si ha:

$$\overline{AB} \leq \overline{AX} + \overline{XB}$$ (disuguaglianza triangolare),

dove l'uguaglianza vale *se e solo* se **X** appartiene al segmento **AB** che denoteremo con [**AB]**.

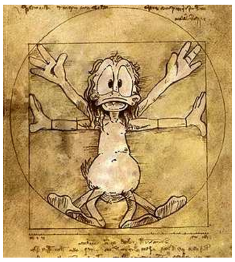
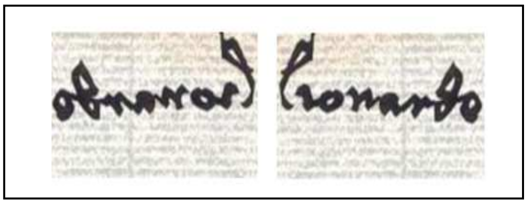
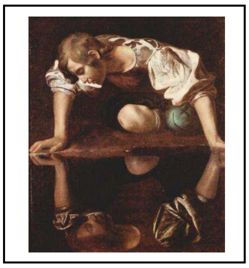
ASSIOMA VI (di simmetria)
Per ogni retta **s** di **π** *esiste una ed una sola simmetria di asse* **s**.

Introdotto l'angolo come rotazione, angolo di due semirette della stessa origine **O**, **a** e **b** nell'ordine, è la rotazione di centro **O** che trasforma **a** in **b**, si può rendere chiaro l'assioma successivo mediante l'esempio concreto del "giro vita", cioè "del filo avvolto attorno a una circonferenza").

ASSIOMA VII (della misura degli angoli)
A ogni numero reale **r≥0** *è associato un angolo, di cui* **r** *è detto la misura o ampiezza, tale che alla somma di due angoli consecutivi è associato il numero somma delle ampiezze dei due angoli.*
Se **0≤r<2π**, (**0°≤r°<360°)** il numero è detto **misura principale**; ogni altra misura è un suo multiplo intero relativo di **2π (360°)**. Un angolo ha quindi **infinite misure**.
Se **p** (**p°**) è la misura principale di un angolo, ogni misura **x** è:
x=p+2kπ, con **k**∈ **Z**, o **x°=p°+k360°**, con **k**∈ **Z** (vedi risoluzioni delle equazioni goniometriche).

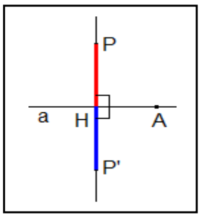
Ecco il percorso che si potrebbe seguire prendendo le mosse dalle isometrie.
Partire da immagini della natura, dell'arte, esperienze comuni, software dinamici e attività pratiche, che ne chiariscano le proprietà fondamentali così che i giovani si rendano bene conto del "sorte" dei punti (La nozione astratta di corrispondenza biunivoca è chiara per i docenti, non per i giovani).
Proporre l'approccio razionale partendo dalla simmetria assiale – data intuitivamente o come assioma - (che consente di ottenere in modo semplice e immediato molte importanti proprietà, e successivamente di traslazione e rotazione - quindi simmetria centrale - che si ottengono dal "prodotto" di particolari simmetrie assiali.
Didatticamente è opportuno presentare diversi teoremi come problemi che porteranno all'enunciato.
È bene poi far notare che il piano non si riduce al foglio o alla lavagna: il piano è infinito. Inoltre ci sono contesti in cui gli "oggetti" geometrici non si possono rendere in grafico o in cui una proprietà dedotta dal disegno potrebbe **non** essere vera perché riferita solo a casi specifici. È necessario quindi controllare con la ragione ciò che abbiamo intuito (Cenni di logica e "comuni" regole di deduzione).
La domanda fondamentale che ci si deve porre affrontando un problema o una dimostrazione è se c'è un'isometria, all'inizio una simmetria assiale, o qualche teorema provato che ci può aiutare.

SIMMETRIA ASSIALE

La **simmetria assiale: "madre" e regina** di tutte le isometrie.
Riprendiamo la definizione di simmetria rispetto a una retta o simmetria assiale.
Data una retta **a**, diciamo simmetria di asse **a**, l'isometria tale che:
- Tutti e soli i punti di **a** sono uniti.
- Ogni punto di uno dei semipiani aperti determinati da **a** si trasforma in un punto del semipiano aperto opposto.

La prima caratteristica assicura che *l'asse è costituito di punti uniti*. Per la seconda è spontaneo chiedersi se la retta che passa per due punti associati distinti gode di qualche particolare proprietà.
Siano $\mathbf{s_a}$ la simmetria rispetto a una retta **a**, **P** un punto che non le appartiene e **P'** il suo simmetrico.
Poiché **P** e **P'** appartengono a semipiani aperti opposti, il segmento **[PP']** interseca **a** in un punto, **H** (assioma IV), che è per ciò **punto unito** (figura).



Allora i punti **P**, **P'** e **H** stanno sulla stessa retta che possiamo indicare come **PP'**, **PH** o **P'H**; ma **PH** ha per simmetrica **P'H**, cioè se stessa, e da ciò la retta **PP'** è unita nella simmetria rispetto ad **a**. La proprietà dimostrata costituisce il
Teorema 1
In una simmetria assiale la retta che congiunge due punti corrispondenti distinti è unita.
Sotto la forma condizionale (alla quale è bene abituare i giovani):
Se $\mathbf{s_a}$ *è la simmetria di asse* **a**, allora *la retta per due punti associati distinti è* **unita** *in* $\mathbf{s_a}$.
Osservazioni
1 I segmenti **[P'H]** e [**PH]** sono simmetrici, hanno allora la stessa lunghezza: $\overline{HP'}=\overline{HP}$.

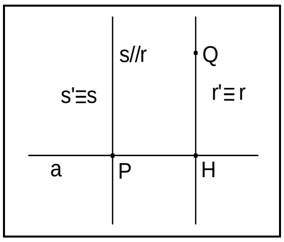
2 Indicato con **A** (figura precedente) un punto di **a** diverso da **H**, $\mathbf{A\hat{H}P}$ e $\mathbf{A\hat{H}P}'$ hanno la stessa ampiezza perché simmetrici e, poiché la loro somma è un angolo piatto, sono retti.

(Anche il termine ampiezza è *improprio* ma chiaro e intuitivo per i giovani in questo stadio).

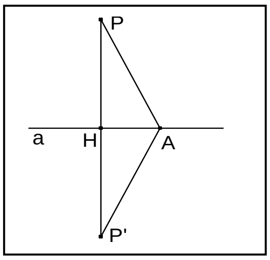
N.B. L'asse di una simmetria è **luogo di punti uniti**, cioè ogni suo punto ha per associato se stesso (è fisso, sta fermo), per ciò si dice che è "**puntualmente**" **unito**. Invece la retta individuata da due punti simmetrici distinti è **unita** nel suo complesso. Ciò significa che i suoi punti, escluso quello comune con l'asse, immagini diverse da sé; tali punti si trasformano *riposizionandosi* però sulla retta stessa (si scambiano le semirette opposte rispetto ad **H**): tale retta si dice <**globalmente**> **unita.**

Faccio osservare a questo punto che l'esistenza e l'unicità della perpendicolare da un punto a una retta, nell'esposizione tradizionale sono molto complicate e artificiose.
Ecco come si può procede nella nostra sistemazione. (A volte sarò un po' sintetico perché quanto scrivo è solo esemplificativo della metodologia seguita).
Il ruolo speciale della retta che congiunge due punti simmetrici distinti e l'**Osservazione** 2, suggeriscono la seguente
Definizione
Una retta **b** si dice *perpendicolare* a una retta **a**, se **b** *è diversa* da **a** e *unita* nella simmetria di asse **a**.
Il secondo punto dell'osservazione precedente "salda" la nuova definizione di perpendicolarità con quella che i giovani conoscono dalla scuola media.
Il teorema e la definizione precedenti garantiscono la seguente proprietà:
Per un punto fuori di una retta passa una sola perpendicolare a una retta data.
È la retta che passa per il punto dato e per il suo simmetrico rispetto alla retta assegnata.

E' naturale chiedersi se questa proprietà è vera anche quando il punto appartiene alla retta.
Cioè: *Se* **P** *è un punto di una retta* **a**, *esiste una e una sola perpendicolare per* **P** *ad* **a**? Scopriamolo.
Ci possiamo servire del teorema precedente e, come di frequente, della simmetria assiale.



Per il **Teorema 1** da un punto **Q** fuori di **a** possiamo condurre una sola perpendicolare **r** ad **a**, unita in $\mathbf{s_a}$; chiediamoci se c'è qualche "speciale" retta per **P** di cui è facile trovare la simmetrica: l'unica retta *speciale* è la parallela **s** per **P** a **r.**
Nella $\mathbf{s_a}$, **s**', simmetrica di **s**, deve passare per **P**, punto unito, ed essere parallela a **r** che è unita; allora **s**' è parallela a **r** perché *in un'isometria rette parallele si trasformano in rette parallele*. Per l'**Assioma II**, **s**' coincide con **s**,
che quindi è unita in $\mathbf{s_a}$ e, in forza della definizione, perpendicolare ad **a**.
In conclusione:
Per un punto di una retta si può condurre una e una sola perpendicolare alla retta.
Le proprietà sotto segnate si possono sintetizzare nel
Teorema 3
Per ogni punto del piano esiste una e una sola perpendicolare a una retta data.
Se **P** *è un punto del piano,* allora *per* **P** *passa una e una sola perpendicolare a una retta* **a**.

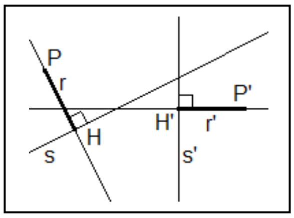


Si dimostra poi facilmente il
Teorema 4
Se **P** è un punto fuori di una retta **a**, allora esiste su **a** un **solo** punto **H** la cui distanza da **P** è minima. (Simmetria e proprietà triangolare applicata al triangolo **PAP**' (figura).
Allora: *il punto di una retta* **a** *con distanza minima da un punto dato* **P** *è il punto* **H** *comune ad* **a** *e alla perpendicolare per* **P** *ad* **a**.
Il punto **H** è detto proiezione ortogonale o semplicemente proiezione di **P** su **a**.
Il precedente risultato è particolarmente importante perché esprime la **perpendicolarità** in termini di **distanza minima** tra un punto e una retta: *la perpendicolare da un punto* **P** *a una retta* **a** *si può pensare come la retta per* **P** *e per il punto di* **a** *che possiede distanza minima da* **P**. La distanza minima fra **P** e i punti di **a**, cioè *la lunghezza del segmento di perpendicolare da* **P** *ad* **a**, $\overline{PH}$, si

definisce distanza di **P** *da* **a** (Essa è quindi un numero **d ≥0**, non un segmento come scrivono quasi tutti i libri di testo di geometria di primo anno).

Corollario 1

In un'isometria rette perpendicolari si trasformano in rette perpendicolari.



Il punto **H** di **s** (figura) è quello di **r** a distanza minima da **P**; allora **H'**, associato di **H** nell'isometria, è il punto di **s'**, immagine di **s**, a distanza minima da **P'** su **r'**, poiché in un'isometria le distanze tra coppie di punti corrispondenti sono uguali.

È immediato anche il successivo (simmetria assiale e proprietà triangolare).

Teorema 5

Se una retta **b** è perpendicolare a una retta **a**, allora **a** è perpendicolare a **b**.

Allora la relazione di perpendicolarità fra rette gode della *proprietà simmetrica* e quindi si può parlare di rette perpendicolari senza indicarne l'ordine.

Proseguiamo nella scoperta di semplici ma significative proprietà delle simmetria assiale, esaminando come si trasformano, in una simmetria assiale, altri semplici "oggetti" del piano.

Teorema 6

Se una retta interseca l'asse in un punto, la retta simmetrica incontra l'asse nello stesso punto.

Il punto comune alla retta e all'asse è unito, quindi la retta corrispondente passa per lo stesso punto.

Teorema 7

In una simmetria assiale una retta parallela all'asse si trasforma in una retta parallela all'asse.

Se *una retta è parallela all'asse di simmetria,* allora *la sua corrispondente è parallela all'asse.*

Per assurdo. Se la simmetrica intersecasse l'asse, per il teorema precedente, anche la retta data dovrebbe incontrarlo, contro l'ipotesi, da cui la tesi.

Corollario 2 (Importante)

Se due rette corrispondenti in una simmetria assiale sono incidenti, allora il punto comune è unito.

Legame fra perpendicolarità e parallelismo tra rette.

Teorema 8

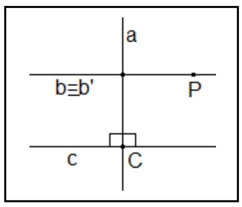
Se due rette sono perpendicolari a una stessa retta, allora sono parallele.

Si può dimostrare facilmente per assurdo.

Si provano subito, senza le proprietà delle rette parallele tagliate da una trasversale, i teoremi:

Teorema 9 (Inverso del precedente)

Se due rette sono parallele, allora ogni retta perpendicolare a una è perpendicolare all'altra.



Siano **b** e **c** le rette parallele e **a** la perpendicolare a **c** in un suo punto **C.** Proviamo che **b'**, immagine di **b** nella simmetria di asse a $\mathbf{s_a}$, coincide con **b**.

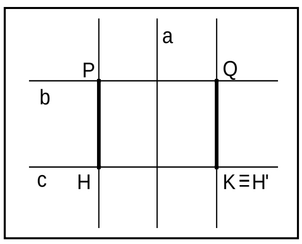
Dal **Teorema 3** per qualunque punto **P** di **b** esiste la perpendicolare **p** ad **a**. Usiamo ora la simmetria $\mathbf{s_a}$; in essa **p** è unita e, per il teorema precedente, è parallela a **c**: per l'assioma di Euclide **p** coincide con **b** che risulta così unita, cioè perpendicolare ad **a**.

I teoremi 8 e 9 stabiliscono una condizione sufficiente e necessaria perché due rette siano parallele.

Teorema 10

Date due rette parallele la distanza di tutti i punti di una dall'altra è costante**.**

Se due rette sono parallele, allora *la distanza di tutti punti di una dall'altra è costante.*

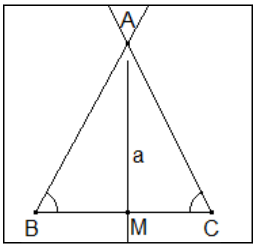


Siano **b** e **c** due rette parallele, **P** e **Q** due qualsiasi punti di una di esse, a esempio **b**, e **H** e **K** nell'ordine le proiezioni ortogonali di **P** e **Q** su **c** (figura). Proviamo che $\overline{QK} = \overline{PH}$ servendoci della simmetria assiale. La più spontanea è quella relativa all'asse **a** del segmento **PQ**, chiamiamola $\mathbf{s_a}$. In $\mathbf{s_a}$, **PQ** è unita per costruzione e **HK** per il **Corollario 1**; poi a **P** corrisponde **Q** e l'associato di **H** punto di **c** a distanza minima da **P**, è il punto **H'** di **c** a distanza minima da **Q**; ed esso è per ipotesi **K**: **K≡ H'**, da cui la tesi.

<u>Quanto provato permette di determinare subito le equazioni delle rette parallele agli assi; ciò è importante, dato che già al primo anno ci si serve spesso dei grafici in fisica</u>.

Ritengo di avere chiarito sufficientemente l'uso della simmetria assiale nelle dimostrazioni.
Proseguo presentandone l'utilizzazione nelle applicazioni.
Nella trattazione, chiamiamola così *moderna*, le figure si classificano in base alle simmetrie (assiali o centrali) di cui godono. Per i triangoli si dà la seguente
definizione: <u>si dice *isoscele* un triangolo che ha un asse di simmetria</u>.
L'asse allora passa per un vertice e scambia gli altri due (È opportuno mostrare con un *sofware* dinamico che è globalmente unito).
In virtù delle proprietà della simmetria assiale è immediato provare che:

- *Se un triangolo ha due angoli della stessa ampiezza,* allora *è isoscele*.

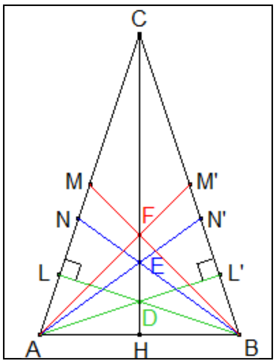


Sia **ABC** un triangolo con $\hat{B}$ e $\hat{C}$ di uguale ampiezza β e γ (figura). Nella simmetria $\mathbf{s_a}$ rispetto all'asse **a** del segmento **[BC]**, che lo interseca nel punto medio **M**, la semiretta **BC** ha per immagine la semiretta **CB** e la semiretta **BA** si trasforma nella semiretta di origine **C –** immagine di **B** - che forma con **CB** un angolo di uguale ampiezza: questa è la semiretta **CA**. Per il **Corollario 2** le semirette **BA** e **CA** sono associate in $\mathbf{s_a}$, ed essendo incidenti in **A**, questo è unito. Allora la retta **AM** è asse di simmetria e **ABC** è isoscele (o $\overline{AC} = \overline{AB}$ e così il **ABC** è isoscele).
Nell'esposizione tradizionale la dimostrazione è lunga e complessa.

- *In ogni triangolo isoscele*:

1. Le mediane che escono dai vertici della base hanno la stessa lunghezza.
2. Le altezze che escono dai vertici della base hanno la stessa lunghezza.
3. I segmenti di bisettrice degli angoli alla base hanno la stessa lunghezza.

Nella sistemazione tradizionale le dimostrazioni sono complicate perché i triangoli che si devono considerare sono "incastrati" uno nell'altro e inoltre bisogna ogni volta esaminarli alla luce di criteri di congruenza diversi. Noi invece utilizziamo la simmetria rispetto all'asse del triangolo.

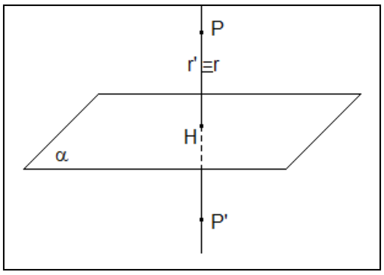


<u>Le mediane relative ai lati isometrici hanno la stessa lunghezza</u>.
Nella simmetria **s** rispetto all'asse **CH** del triangolo, **C** è unito e ad **A** corrisponde **B**.
L'immagine di **M** punto medio di **AC** deve avere stare su **CB** e avere da **C** – che è unito in **s** - distanza uguale alla metà di $\overline{AC}$: essa è allora il punto **M'**: $\overline{AM'} = \overline{BM}$.
<u>Le altezze relative agli lati isometrici hanno la stessa lunghezza</u>.
Ancora nella simmetria **s** l'associato di **L**, punto del segmento **AC** a distanza minima da **B**, è il punto di **BC** - immagine di **AC -** a distanza minima da **A** corrispondente di **B** in **s**, cioè **L'**: quindi $\overline{AL'} = \overline{BL}$.
<u>Le bisettrici degli angoli alla base hanno la stessa lunghezza</u>.
Sempre in **s**, $A\hat{B}N$ ha per associato l'angolo di vertice **A –** simmetrico di **B -** che forma con la semiretta **AB –** immagine della semiretta **BA** - un angolo di ampiezza uguale a quella di $H\hat{B}N$: tale angolo è per ipotesi $B\hat{A}N'$, quindi la tesi.
Un'osservazione interessante.
Poiché i segmenti **AM'** e **AM** sono corrispondenti e incidenti, essi, per il **Corollario 2**, s'intersecano in un punto dell'asse **CH**. Analoghe considerazioni per altezze e bisettrici.
Per dimostrare queste proprietà con la sistemazione tradizionale, si deve faticare non poco.

Presento infine due esempi che si riferiscono all'uso della simmetria nello spazio. In esso, oltre ai consueti assiomi, si dà l'assioma di simmetria rispetto a un piano che è, come osservato, "naturale".
Per ogni piano esiste una isometria e una sola, **detta simmetria rispetto al piano**, **nella quale:**

- **tutti e soli i punti del piano sono uniti**;
- **a un qualunque punto di un semispazio aperto è associato un punto del semispazio aperto opposto**.

Perpendicolarità fra retta e piano.



In analogia a quanto fatto nel piano, rendiamo "costruttiva" la definizione di retta per un punto perpendicolare a un piano.

Dati un piano α e un punto **P non** appartenente ad α, diciamo **P**' il suo associato nella simmetria rispetto ad α s_α. ed **r** la retta **PP**'. Poiché **P** e **P**' stanno in semipiani aperti opposti, il segmento [**PP**'**]** interseca il piano nel punto **H**, unito in s_α; le rette **PP**', **PH** e **P**'**H** coincidono, ed essendo **P**'**H** corrispondente di **PH**, la retta **PP**' è unita in s_α.

Poniamo allora la seguente *definizione*:

Una retta si dice perpendicolare a un piano se *non* giace su questo ed è unita nella simmetria rispetto a esso**.**

Poiché è unica la retta per due punti distinti, dalla costruzione fatta e dalla definizione precedente otteniamo immediatamente il

Teorema 1

*Tutte e sole le rette che passano per coppie di punti corrispondenti distinti nella simmetria rispetto a un piano sono perpendicolari al piano***.**

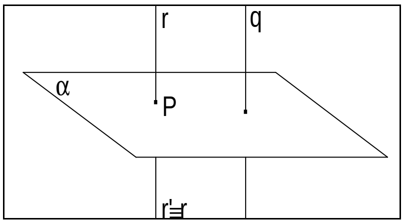
Corollario

Per ogni punto non appartenete a un piano si può tracciare una ed una sola perpendicolare al piano (quella che passa per il punto e per il suo corrispondente nella simmetria rispetto al piano).

Ci proponiamo ora di provare che vale, come suggerisce l'intuizione, il

Teorema 2

Per ogni punto appartenete a un piano si può tracciare una e una sola perpendicolare al piano.



Siano α un piano e **P** un punto su α (figura). Indicata con **q** una retta perpendicolare ad α, in analogia a come fatto nel piano, consideriamo la retta **r** per **P** parallela a **q**: nella simmetria rispetto ad α, s_α, **r**' associata di **r**, passa per **P** che è punto unito, ed è parallela a **q**, poiché una isometria conserva il parallelismo; ma **q** è unita in s_α, quindi **r'≡r** per l'assioma di Euclide: allora **r** perpendicolare ad α.

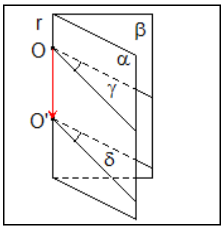
I due teoremi precedenti si possono sintetizzare nel

Teorema 3

Per ogni punto dello spazio si può condurre una ed una sola perpendicolare ad un piano.

Teorema

Sezioni parallele di uno stesso diedro sono angoli della stessa ampiezza.



Siano α e β due piani del fascio di asse una retta **r** e γ e δ gli angoli intersezione di due piani paralleli che intersecano il diedro rispettivamente in due semirette di vertici **O** e **O**'. La traslazione $\boldsymbol{\tau}$ di vettore $\overrightarrow{OO'}$ muta l'angolo γ nell'angolo δ perché in una traslazione a semirette corrispondono semirette parallele ed equiverse. I due angoli hanno allora la stessa ampiezza poiché associati in una traslazione.

In particolare, tutte le sezioni normali di un diedro hanno la stessa ampiezza.

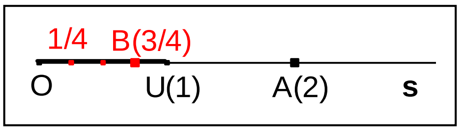
Spero di avere esposto in modo comprensibile il mio pensiero e mi scuso per le imprecisioni.

Se qualche collega per (s)ventura volesse scambiare con me qualche idea o esprimere critiche in relazione a quanto ho scritto, può contattarmi al seguente indirizzo: grassoalfino@yahoo.it.

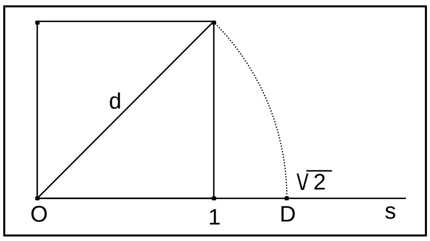
Alfio Grasso Giarre 24 Settembre 2013

Appendice
Già presso i popoli antichi, dati due luoghi, due punti, la loro distanza era indicata da un *numero positivo* che quantificava, misurava il rapporto fra *il tragitto rettilineo* che li legava e un tragitto rettilineo prefissato, quello che chiamiamo unità di misura.
Questa era legata, a seconda delle situazioni, a parti del corpo o a oggetti concreti o situazioni reali.
Così troviamo:
dito (2 cm circa), *palmo* (7-8 cm), *spanna* (25 cm circa), *piede* (30 cm circa), *cubito* (50 cm circa) *passo* (75 cm circa), *pertica* (3 m circa), *asta* (52 m circa), *stadio* (180 m circa), fiume (20 Km circa).

Autostrade di Roma antica (un'introduzione "soft" dei numeri reali non negativi)
A partire dalla fine del IV secolo a.C. i romani costruirono strade di grande comunicazione per collegare le città più importanti e consentire agli eserciti, alle merci e ai cittadini di viaggiare rapidamente. L'imperatore **Augusto**, nel 20 a.C. piazzò il *Miliarum aureum* (la pietra miliare aurea) nel foro a Roma. Si voleva così evidenziare ancora di più che Roma era il centro del mondo.
Lungo le strade, i cippi delle **pietre miliari**, in cui erano incise le distanze dal cuore dell'impero permettevano di conoscere esattamente i luoghi e le loro distanze (la parola *miliari* deriva dal latino *milia*, cioè miglia; 1 miglio = 1480 m circa). Ancora oggi, lungo le strade e le autostrade si trovano cippi o cartelli che indicano le distanze in chilometri da una città.
Chiaramente se uno abita in una piccola frazione o in una casa singola fuori città, si devono usare unità di misura più piccole. E, man mano che le distanze diminuiscono, si devono usare unità sempre più piccole (il diametro di un elettrone è dell'ordine di 10^{-13} cm, cioè 0,00000000000001 un decimillesimo di miliardesimo di centimetro!).
Usiamo allora la matematica e vediamo come esprimere in tutti i casi la distanza fra due punti. Per ottenere ciò stabiliremo uno stretto legame fra i numeri **r≥0** e i punti di una semiretta **s**, che possiamo pensare come la rappresentazione geometrica di una strada a senso unico e la cui origine coincide con l'inizio del senso unico stesso.
Assegnata una semiretta **s** di origine **O**, fissiamo su essa un punto **U** e assumiamo il segmento **OU** come unità di misura dei segmenti, cioè poniamo la distanza tra **O** e **U** - che s'indica con - $\overline{OU}$ - uguale a uno: $\overline{OU} = 1$.



Consideriamo ora un numero naturale, per esempio **2**; riportando due volte su **s** a partire da **O** il segmento **OU** s'individua un solo punto, sia **A**, tale che $\overline{OA}$=2:
chiamiamo *immagine, associato o corrispondente* di **2** mediante il procedimento descritto e lo indichiamo con **A(2)**.
Analogamente, preso un numero razionale, a esempio quello rappresentato dalla frazione **3/4**, dividiamo l'unità in quattro parti e troviamo il punto **B** riportando su **s**, a partire da **O**, tre volte la quarta parte ottenuta (figura): anche in questo caso il procedimento utilizzato ci fa pervenire a un solo punto **B** di **s**; scriviamo allora **B(3/4)**. È il punto **B** ora *l'immagine, l'associato o il corrispondente* su **s** di **3/4**.
In generale, assegnato il numero razionale individuato dalla frazione **n/d** - con **n** e **d** naturali e **d** diverso da zero (perché?) - dividiamo il segmento unitario **d** parti, uguali a **1/d** e riportiamo su **s** a partire da **O n** volte il segmento **1/d**: consideriamo il punto **P** così ottenuto l'immagine di **n/d** su **s**, e scriviamo **P=(n/d)**.
Con questo procedimento possiamo disporre tutti i numeri razionali **q≥0** su una semiretta **s**, trovando a ciascuno un posto su un unico punto (all'origine **O** di **s** associamo chiaramente lo **0**).



Pensate che abbiamo esaurito i punti della semiretta? Che l'abbiamo "riempita"? Per accertarcene eseguiamo una semplice costruzione.
Realizziamo il quadrato che ha per lato **1** a partire dall'origine **O** della semiretta **s.** La misura della diagonale, in forza del teorema di

Pitagora, che avete già studiato alla scuola media, è: **d**=$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.
Riportiamo ora **d** su **s**, sempre da **O**, otteniamo il punto **D** tale che $\overline{OD}=\sqrt{2}$. La costruzione suggerisce che $\sqrt{2}$ è compreso fra **1** e **2**, ma non sappiamo che "razza" di numero è. Imparerete a conoscerlo bene in seguito assieme ad altri infiniti della stessa stirpe, per ora vi è sufficiente sapere che: $\sqrt{2}$ non è un numero razionale, non si può esprimere come una frazione e quindi come numero decimale finito o periodico. Esso appartiene a un nuovo *club esclusivo*, quello dei numeri **irrazionali**. Essi, nella scrittura decimale, presentano la caratteristica che sono numeri decimali con infinite cifre dopo la virgola, ma senza periodo.
Allora su **s** esistono punti che non rappresentano numeri razionali; questi lasciano sulla semiretta infiniti "buchi". Se però consideriamo numeri come $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{10}, \sqrt[3]{2}$, ecc, che avete già incontrato alla scuola media, essi permettono di "riempire" le infinite lacune lasciate dai numeri razionali: anche il *famigerato* numero **π**, che si trova nella lunghezza della circonferenza, **2πr**, nell'area del cerchio, $\boldsymbol{\pi r^2}$, nel volume della sfera, $\boldsymbol{(4/3)\pi r^3}$, è un numero irrazionale; lo avete usato con l'approssimazione alla cifra dei centesimi: **3,14**.
L'insieme formato dai numeri razionali maggiori o uguali a **0** e dagli irrazionali maggiori di **0** si chiama insieme dei *numeri reali* **r≥0**. Esso s'indica con $\mathbf{R}^+$.
Con l'introduzione dei numeri irrazionali maggiori o uguali a **0** possiamo allora affermare che, data una semiretta **s** di origine **O**:

- a ogni numero reale **r**≥0 corrisponde *un solo punto* **P** su **s**, quello per cui $\overline{OP}$ =**r**;
- a ciascun punto **P** di **s** è associato *l'unico numero reale* **r**≥0 tale che **r**=$\overline{OP}$.

Questo procedimento determina un legame **1** a **1** fra *tutti* i numeri reali **r**≥0 e *tutti* i punti di una semiretta **s** e *viceversa*. Ciò si esprime dicendo che:
si è stabilita una corrispondenza biunivoca fra punti di una semiretta e numeri reali non negativi, cioè maggiori o uguali a 0.
(Non ho insistito oltre sui numeri irrazionali perché, per tutto il primo anno, si utilizza solo un piccolo numero di proprietà dell'addizione e della moltiplicazione, già consolidate, anche se non assiomatizzate, cioè quelle di *campo totalmente ordinato* dei numeri razionali **Q**).