Parabola “diversa”

§ 1

1) *Problema di Delo*

Nella straordinaria eredità scientifica lasciataci dagli antichi greci, ci sono tre celebri problemi “impossibili” da risolvere:

- La quadratura del cerchio, cioè la determinazione di un quadrato di area uguale a quella di un cerchio dato.
- La duplicazione del cubo, ovvero l’individuazione del lato del cubo di volume doppio rispetto a un cubo di lato assegnato.
- La trisezione dell’angolo, ossia la precisazione dell’angolo terza parte di un angolo fissato.

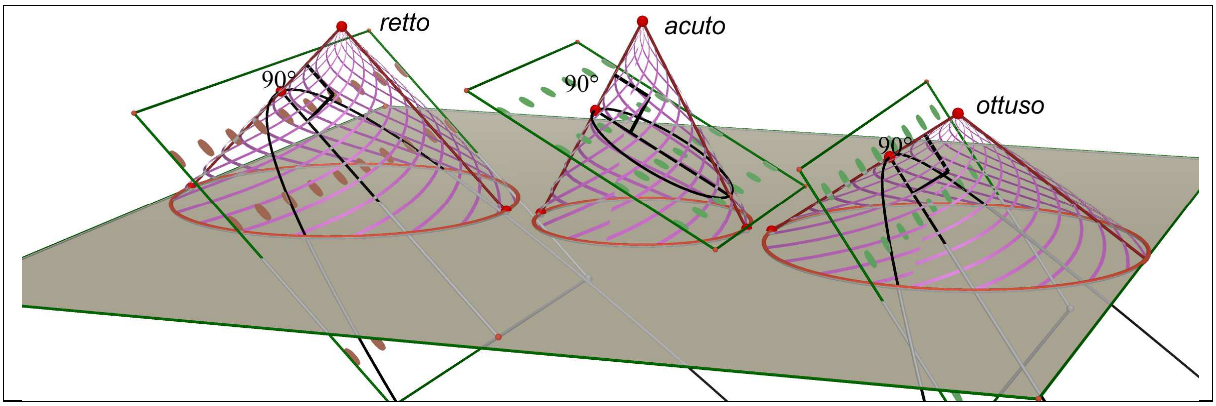
Va chiarito che i problemi erano “impossibili” da risolvere perché la matematica greca usava come strumenti di elezione per le costruzioni geometriche, solo la riga (non graduata) e il compasso. E ciò perché questi rappresentavano le *figure perfette* - dotate d’infinite simmetrie - cioè la retta e la circonferenza, mentre riga e compasso non permettono di risolvere quei problemi.

Quale fosse il loro rilievo è evidenziato addirittura nei versi finali del *Paradiso* di **Dante**. Il Poeta scrive in sostanza: come uno studioso di geometria si affatica inutilmente a risolvere il problema della quadratura del cerchio, così è impossibile per la mente umana concepire il mistero dell’Incarnazione.

Ci occuperemo della *duplicazione del cubo*, che ha costituito uno sprone per la ricerca di figure geometriche che potessero dare una soluzione, anche se *non perfetta*, alla duplicazione del cubo.

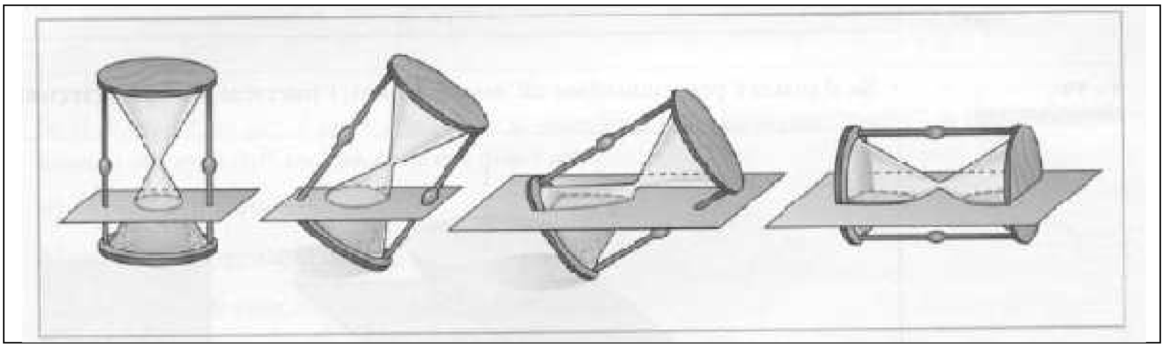
La scoperta delle sezioni coniche – chiamate comunemente *coniche* – è un risultato “collaterale” della duplicazione del cubo, nota anche come problema di Delo (la cui denominazione sarà chiarita dall’insegnante). Tale problema, tradotto in termini di calcolo, comporta la risoluzione dell’equazione $\mathbf{x^3=2 \cdot l^3}$, nella quale **x** indica il lato del cubo che vogliamo determinare ed **l** il lato del cubo dato. La sua soluzione è $\mathbf{x=l \cdot}\sqrt[3]{2}$, numero *irrazionale*; i greci antichi però non possedevano l’algebra e soprattutto avevano un *sacro terrore* dei numeri irrazionali, la cui scoperta – nel V secolo a.C. da parte dei pitagorici - aveva sconvolto il loro mondo scientifico e filosofico.

Intorno al 350 a.C. **Menecmo**, alla ricerca di figure che potessero consentire di risolvere il problema, determina le coniche secando un *cono circolare retto* – con l’angolo al vertice variabile - con piani perpendicolari a una generatrice. Se angolo è retto la curva sezione si chiama *parabola*, se acuto *ellisse* (la circonferenza è una particolare ellisse), se ottuso



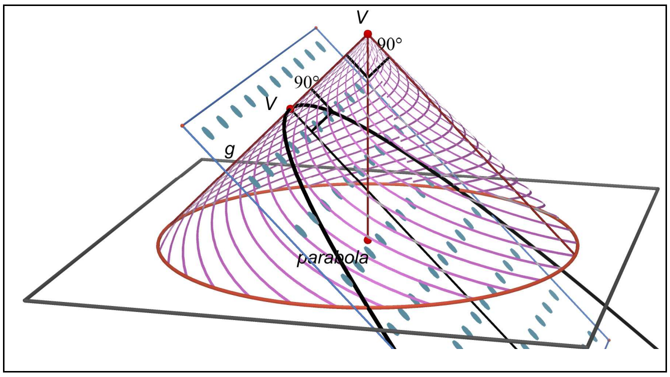
iperbole.
Tali nomi furono però attribuiti solo più tardi da **Apollonio** di Perga (III-II secolo a.C.), che per primo intersecò con un piano variabile, un doppio cono, nel suo trattato *Coniche*. Questo è eccezionale al punto da condannare all'oblio un trattato sulle coniche di **Euclide**. Le proprietà scoperte da Apollonio, *esclusivamente per via geometrica*, sono quelle che si studiano ancora nelle università: onore alla geometria!

I nomi assegnati dal grande matematico di Perga fanno riferimento ai problemi, esposti nel I, II e VI libro degli *Elementi* di Euclide, che in seguito sono stati chiamati di "applicazioni delle aree". Queste erano gli *strumenti geometrici* con cui i greci *risolvevano* i problemi che per noi comportano equazioni algebriche di I o II grado.
Intuitivamente le tre curve erano già note ai greci per via della clessidra, usata spesso come "orologio" (nei tribunali, già all'inizio del IV secolo a.C., scandiva i tempi degli "avvocati"). La superficie dell'acqua infatti determina con quella della clessidra curve che assumono le



forme delle tre coniche al variare della sua inclinazione su un tavolo.

2) ***Introduzione della parabola*.**
Se l'angolo al vertice del cono è retto, si ottiene, come si è detto la *parabola*, di cui Menecmo determinò, con la *geometria elementare*, la proprietà caratteristica di cui godono tutti i suoi punti e solo essi. Non è noto come il matematico greco l'abbia determinata. Ne daremo più avanti un procedimento fondato sulla geometria elementare nel piano.

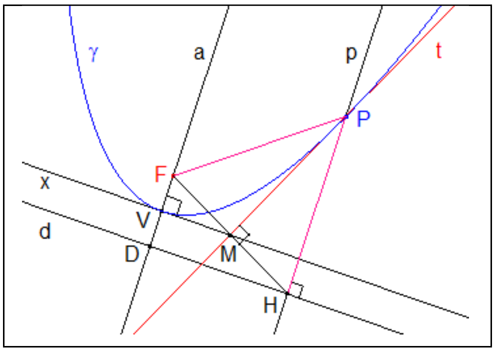


Nei nostri testi lo studio di questa curva piana inizia in genere con la definizione, e si dà per scontato che la curva sia quella del grafico disegnato.
A mio parere, **qualunque** sia l'argomento da proporre, sarebbe opportuno:
- inserirlo nel contesto storico-culturale che gli è proprio (così che possa essere anche fonte di suggestioni);
- prendere le mosse da un problema che, nel nostro caso, proponga della parabola una costruzione semplice, da cui si può ottenere facilmente l'*equazione della curva*;
- prospettare diversi ambiti di utilizzo, sia teorici che applicativi.

Questo tipo di approccio presenta almeno due motivazioni interessanti e prevede che la definizione sia la conclusione di un percorso, non una designazione astratta:

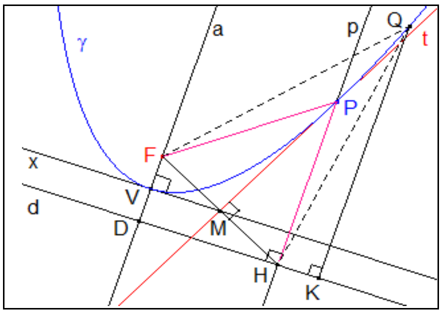
- La definizione di un "oggetto geometrico" non ne implica l'esistenza.
  (Per la matematica greca un ente geometrico esisteva **solo** se si poteva darne una costruzione, ovviamente con riga e compasso).
- La costruzione mediante un software dinamico, oltre ad avere un effetto visivo chiarificatore, favorisce la partecipazione attiva dei giovani.

Questo un possibile, semplice percorso.
Gli allievi **devono** già conoscere luoghi geometrici come: l'asse di un segmento, la bisettrice di un angolo e la circonferenza. Sanno che quest'ultima che è il luogo dei punti del piano che hanno uguale distanza **r>0** da un punto assegnato, detto centro. È spontaneo allora porre il problema: se oltre a un punto assegniamo una retta cui non appartiene, *esistono punti del piano equidistanti dal punto e dalla retta*? Si accettano contributi …..
Se non ne emergono, si può suggerire: tracciamo la perpendicolare dal punto alla retta……
Ecco una costruzione molto semplice del nostro luogo, chiamiamolo **γ**.
Siano **F** un punto e **d** una retta che non passa per **F** (figura). Un punto **P** appartiene a **γ** se è equidistante da **F** e **d**. Quindi, poiché la distanza di un punto da una retta è la lunghezza del segmento di perpendicolare dal punto alla retta, **P** "è costretto" a stare sulla perpendicolare **p** a **d** per un qualunque punto **H** di **d** ed essere equidistante da **F** e **H**. Così **P**, oltre ad appartenere alla retta **p**, deve stare sull'asse **t** del segmento **FH**, cioè sulla perpendicolare a **FH** per il suo punto medio **M**.



Al variare di **H** su **d**, il punto **P** così trovato descrive il luogo. A questo punto si dà la definizione.
Dati un punto **F** *e una retta* **d** *cui non appartiene, si chiama parabola di fuoco* **F** *e direttrice* **d** *il luogo* **γ** *dei punti del piano equidistanti da* **F** *e* **d** (chiariremo fra breve perché **F** è chiamato fuoco).
Dal suggerimento dato, la retta **a** per **F** perpendicolare a **d** la interseca in un punto, **D**, tale che il punto medio **V** del segmento **FD** appartiene alla parabola; essa presenta poi in **a** un *asse di simmetria* per via della costruzione: il punto **V** intersezione della parabola col suo asse di simmetria si chiama *vertice* della parabola.

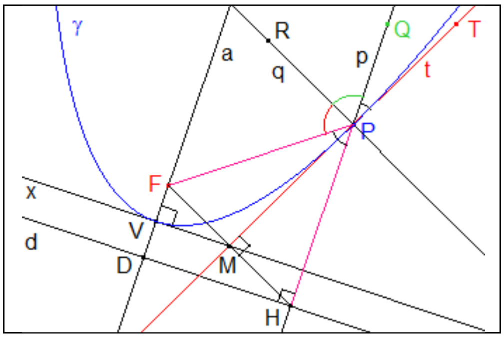
2) <u>*Tangente a una parabola in un suo punto*</u>
L'intuizione suggerisce che la retta **t** non ha punti comuni con **γ** diversi da **P**: proviamolo.
Sia **Q** un punto di **γ** *diverso* da **P**; indicata con $\overline{QK}$ la sua distanza da **d**, distanza minima fra **Q** e i punti della direttrice **d**, $\overline{QH} > \overline{QK}$, ma $\overline{QK} = \overline{QF}$ perché **Q** sta su **γ**, quindi $\overline{QH} > \overline{QF}$.



Allora, per una nota proprietà dell'asse di un segmento: **Q** <u>appartiene al semipiano individuato da **t** cui appartiene</u> **F** e quindi la retta **t** *ha in comune con* **γ** **solo** *il punto P*.
Tale retta si dice *tangente alla parabola γ nel punto P*.

3) Al….fuoco!
Torniamo alla costruzione della parabola per metterne in risalto un'importante proprietà.
Preliminarmente introduciamo la seguente definizione:
<u>Si chiama *diametro* di una parabola in un suo punto la retta per esso parallela all'asse</u>.

In forza della costruzione (figura), la retta **p** è un diametro e gli angoli $F\hat{P}M$ e $H\hat{P}M$ hanno la stessa ampiezza perché simmetrici rispetto a **t**; inoltre anche $T\hat{P}Q$ e $H\hat{P}M$ sono di uguale misura, essendo simmetrici rispetto a **P**: quindi $F\hat{P}M$ e $T\hat{P}Q$ sono isometrici per transitività. Da ciò:



In ogni punto P di una parabola γ, gli angoli che la tangente **t** *in* **P** *a γ forma col diametro per* **P** *e con la semiretta* **PF** *di origine* **P** *hanno la stessa ampiezza.*

Di conseguenza, detta **q** la perpendicolare a **t** per **P** ed **R** un punto di **q**, gli angoli $Q\hat{P}R$ ed $R\hat{P}F$ sono simmetrici rispetto a **q** e hanno quindi la stessa ampiezza.

Pensiamo ora che la parabola sia costituita da una strisciolina sottile di materiale riflettente. Allora, ogni raggio luminoso come **p** parallelo all'asse, segue la *legge di riflessione della luce* rispetto alla perpendicolare **q** a **t** nel suo punto d'incidenza **P** con lo "specchio" **t** e si riflette nel punto **F**. In esso quindi si concentra l'energia termica di tutti i suddetti raggi ed **F** va …. a **fuoco**, donde il nome.

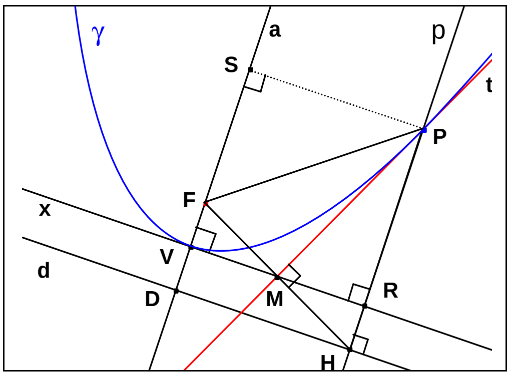
Questa proprietà era già nota ad Archimede che, secondo la leggenda, **avrebbe**! bruciato alcune navi dei romani durante l'assedio a Siracusa nel 212 a.C., avendo realizzato degli specchi che avevano forma di grandi *paraboloidi* (solidi ottenuti dalla rotazione di una parabola attorno al proprio asse), cioè come le attuali antenne televisive che si chiamano impropriamente parabole.

La costruzione iniziale e la proprietà dimostrata assicurano che:
<u>la retta tangente alla parabola γ in un suo punto **P** è la perpendicolare al segmento **FH** nel suo punto medio **M**</u>.

In particolare, la retta **x** per **V** perpendicolare ad **a** non interseca γ in alcun altro punto, quindi è <u>tangente alla parabola in **V**</u>. Per quanto sopra sottolineato, tutti gli altri punti di γ appartengono al semipiano determinato dalla retta **x** che contiene il fuoco; per questo motivo si dice che: *la parabola volge la concavità verso il fuoco*.

4) *<u>Un'espressione significativa della proprietà intrinseca dei punti della parabola</u>*.

Il procedimento seguito per trovare i punti della parabola ci consente di affermare (figura) che, per ogni posizione del punto **H** sulla direttrice, esiste un solo punto **P** di γ – quindi equidistante da **F** e **d** - tale che il triangolo **HMP** è rettangolo in **M**. Chiamato allora **R** il punto comune alle rette **p** e **x**, **MR** è l'altezza relativa all'ipotenusa **PH**. In forza del cosiddetto *II teorema di Euclide*, otteniamo che $\overline{PR} : \overline{MR} = \overline{MR} : \overline{RH}$, da cui $\overline{PR} = \dfrac{\overline{MR}^2}{\overline{RH}}$, ovvero infine



$$\frac{\overline{PR}}{\overline{MR}^2} = \frac{1}{\overline{RH}}.$$

(Ho usato un linguaggio "algebrico", perché quello greco delle grandezze sarebbe pesante).

Osserviamo ora che, per costruzione **RH** e **FV** sono simmetrici rispetto a **M**, da cui $\overline{RH} = \overline{FV}$ <u>che è costante</u> essendo la metà della distanza di **F** da **d**; quindi, per un generico punto **P** di γ :

$$(*)\ \frac{\overline{PR}}{\overline{MR}^2}=\frac{1}{\overline{FV}}.$$

Scriviamo la (*) sotto una forma più espressiva (figura precedente).
Detta **S** la proiezione ortogonale di **P** sull'asse, $\overline{SP}=\overline{VR}$ (lati opposti del rettangolo VRPS) e così $\overline{MR}=\frac{\overline{VR}}{2}=\frac{\overline{PS}}{2}$. La (*) dunque diventa (**) $\frac{\overline{SV}}{\overline{PS}^2}=\frac{1}{4\overline{FV}}$.

Essa esprime sotto un'altra forma la proprietà intrinseca della parabola, nella quale dunque:
È costante il rapporto fra la distanza di un generico punto P dalla tangente nel vertice e il quadrato della sua distanza dall'asse.

La (**) si può anche scrivere: **(#)** $\overline{SV}=\frac{1}{4\overline{FV}}\overline{PS}^2$. Ne vedremo fra breve l'importanza.

§ 2

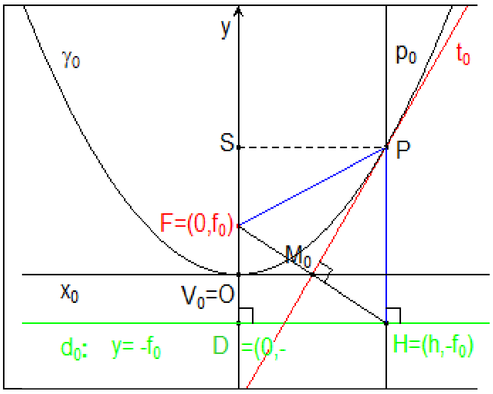
1) Equazione della parabola con fuoco sull'asse $\vec{y}$ e direttrice parallela all'asse $\vec{x}$.

Prendendo le mosse dalla **(#)** possiamo scrivere, in un opportuno riferimento cartesiano ortogonale (figura sotto), quella che si chiama *equazione di una parabola* $\boldsymbol{\gamma_0}$, dati fuoco $\mathbf{F_0}$ e direttrice $\mathbf{d_0}$. Cioè l'equazione che "traduce" la proprietà geometrica che caratterizza ogni punto **P** del luogo $\boldsymbol{\gamma_0}$, nel legame cui devono soddisfare *tutte e sole* le coordinate di **P=(x,y)**, mediante le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice.

Scegliamo come asse $\vec{y}$ l'asse di simmetria della parabola e, indicato con $\mathbf{D_0}$ il punto comune a $\mathbf{d_0}$ e all'asse $\vec{y}$, assumiamo per origine **O**, punto medio del segmento $\mathbf{F_0D_0}$; orientiamo poi l'asse $\vec{y}$ da $\mathbf{D_0}$ verso $\mathbf{F_0}$: l'asse $\vec{x}$ è asse del segmento $\mathbf{F_0D_0}$ ed è orientato così che l'angolo $\vec{x}\wedge\vec{y}$ abbia ampiezza uguale a 90° (π/2). Il vertice **V≡O**, l'asse $\vec{x}$ è tangente in **O** a $\boldsymbol{\gamma_0}$ e, detta $\mathbf{f_0}$ l'ordinata del fuoco $\mathbf{F_0=(0,f_0)}$, l'equazione della direttrice è: $\mathbf{y=-f_0}$.

Primo procedimento

Ricordiamo che *la parabola* $\boldsymbol{\gamma_0}$ *volge la concavità verso il fuoco* (**§ 1** punto **3**). Così, se $\mathbf{F_0}$ ha ordinata positiva, **P** e quindi **S**, ha ordinata positiva; mentre se $\mathbf{F_0}$ possiede ordinata negativa, tale è anche quella di **P** e conseguentemente di **S**.



Allora da **(#)** $\overline{SV}=\frac{1}{4\overline{FV}}\overline{PS}^2$ abbiamo che, dette **x** e **y** l'ascissa e l'ordinata di un qualunque punto della parabola, la proprietà caratteristica geometrica del punto **P=(x,y)** si "traduce" nell'equazione cui devono soddisfare le coordinate di *tutti* i punti di $\boldsymbol{\gamma_0}$ e *di essi soltanto*:

$$\mathbf{y}=\frac{1}{4f_0}x^2.$$

Questa è **l'equazione della parabola di fuoco $\mathbf{F_0=(0,f_0)}$ e direttrice $\mathbf{d_0}$: $\mathbf{y=-f_0}$.**

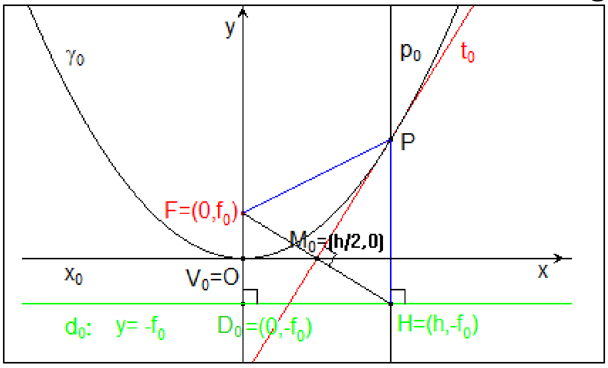
Ribadiamo: dire che $\mathbf{y}=\frac{1}{4f_0}x^2$ è l'equazione della parabola $\boldsymbol{\gamma_0}$ significa che:

- Se un punto appartiene alla parabola $\boldsymbol{\gamma_0}$ le sue coordinate devono verificarne l'equazione.

- <u>Viceversa, se le coordinate di un punto soddisfano l'equazione di γ_0, esso le appartiene</u>.

Secondo procedimento
Usiamo la costruzione della parabola.
Detto **H** un qualunque punto di $\mathbf{d_0}$, esso possiede ascissa variabile, sia **h**, e ordinata $\mathbf{-f_0}$: H_0**=(h,-**$\mathbf{f_0}$**)**; allora il punto **P** che descrive il luogo deve:

1. appartenere alla perpendicolare $\mathbf{p_0}$ alla direttrice per punto generico **H** di questa;
2. essere equidistante da $\mathbf{F_0}$ e da **H**, cioè stare sull'asse $\mathbf{t_0}$ del segmento $\mathbf{F_0H}$ **.**



Per la 1. **P** giace sulla retta di equazione **1) x=h.**
Per la seconda proprietà, scriviamo l'equazione di $\mathbf{t_0}$, cioè l'equazione della perpendicolare al segmento $\mathbf{F_0H}$ per il suo punto medio $\mathbf{M_0}$**=(h/2, 0)**.
Il coefficiente angolare di $\mathbf{F_0M_0}$ è **m=-2**$\mathbf{f_0}$**/h** (differenza delle ordinate/differenza delle ascisse), quindi il coefficiente angolare di **t** è **m□=h/2**$\mathbf{f_0}$; da ciò l'equazione di **t** è:

$$\textbf{2) } \mathbf{y}=\frac{h}{2f_0}\left(x-\frac{h}{2}\right).$$

L'equazione cartesiana, cioè in **x** e **y** di γ_0 si ottiene eliminando il parametro **h** fra 1. e 2.:

$$\begin{cases} \mathbf{x=h} \\ \mathbf{y}=\dfrac{h}{2f_0}\left(x-\dfrac{h}{2}\right). \end{cases}$$

Dalla prima equazione **h=x** che, sostituita nella seconda, dà $\mathbf{y}=\frac{x}{2f_0}\left(x-\frac{x}{2}\right)$. Eseguendo i facili calcoli
si ha che l'equazione di γ_0 è: $\mathbf{y}=\frac{1}{4f_0}x^2$.

Un'osservazione significativa

Confrontando l'equazione di γ_0**:** $\mathbf{y}=\frac{1}{4f_0}x^2$ con la (#) $\overline{SV}=\frac{1}{4\overline{FV}}\overline{PS}^2$, notiamo che: l'equazione della parabola nel riferimento scelto ha la stessa forma della proprietà che esprime il luogo e quindi la caratteristica propria della parabola. In un altro riferimento l'equazione è più complessa:
<u>l'aspetto geometrico è *più espressivo* di quello analitico</u>.

Se in $\mathbf{y}=\frac{1}{4f_0}x^2$ poniamo $\mathbf{a}=\frac{1}{4f_0}$ (quindi $\mathbf{f_0}=\frac{1}{4a}$), l'equazione della parabola γ_0 diventa:

$$\textbf{(\&)}\ \ \mathbf{y=ax^2},$$

detta *forma canonica* dell'equazione della parabola di fuoco $\mathbf{F_0=(0,}\frac{1}{4a}\mathbf{)}$ e direttrice $\mathbf{d_0}$: $\mathbf{y=-}\frac{1}{4a}$.

Poiché **a** esibisce lo stesso segno di $\mathbf{f_0}$ e *la parabola volge la concavità verso la semiretta dell'asse cui appartiene il fuoco*, deduciamo che $\boldsymbol{\gamma_0}$ di equazione $\mathbf{y=ax^2}$:

- volge la concavità verso il semiasse positivo delle ordinate se **a>0**;
- volge la concavità verso il semiasse negativo delle ordinate se **a<0**.

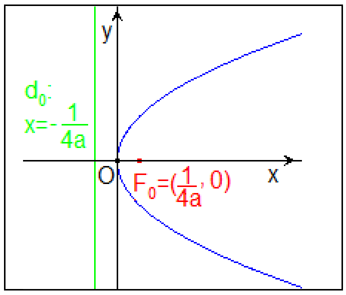
<u>Al variare di $\mathbf{f_0}$, quindi di **a**, nell'insieme dei numeri reali escluso lo zero</u>, $\Re-\{0\}$, $\mathbf{y=ax^2}$ <u>rappresenta tutte e sole le parabole col fuoco sull'asse</u> $\vec{y}$ <u>e direttrice parallela all'asse</u> $\vec{x}$.

Ci saranno utili in seguito le seguenti osservazioni che derivano dalla costruzione:

$\mathbf{x_V=x_F}$, $\mathbf{y_F=y_V+1/4a}$, l'equazione della direttrice $\mathbf{d_0}$ risulta $\mathbf{y=y_V-1/4a}$.

Applicazioni……

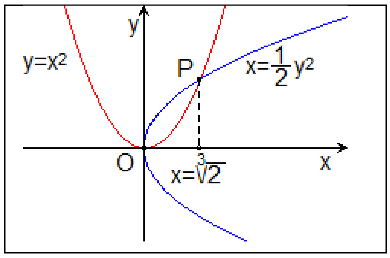
Equazione della parabola il cui asse di simmetria è l'asse $\vec{x}$.



Se nel sistema di riferimento scambiamo il ruolo delle due incognite per simmetria l'equazione di $\boldsymbol{\gamma_0}$ diventa $\mathbf{x=ay^2}$, il suo grafico è simmetrico di quello precedente rispetto alla bisettrice di primo e terzo quadrante; il fuoco è $\mathbf{F_0=(1/4a,\ 0)}$ e l'equazione di $\mathbf{d_0}$ è $\mathbf{x=-1/4a}$.

Fate la costruzione per esercizio.

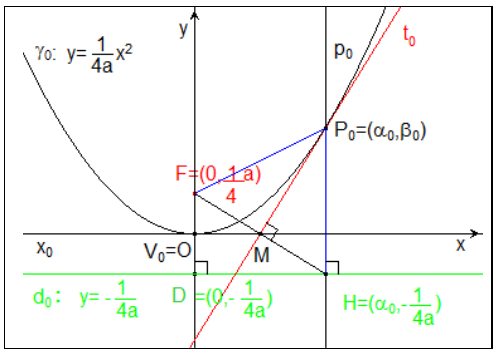
La parabola consente di risolvere il problema di Delo.



Intersechiamo le parabole di equazioni $\mathbf{y=x^2}$ e $\mathbf{x=}\frac{1}{2}\mathbf{y^2}$.

Sostituendo $\mathbf{x^2}$ a **y** nella seconda, abbiamo $\mathbf{x=}\frac{1}{2}\mathbf{x^4}$, o anche $\frac{1}{2}\mathbf{x^4}$**–x=0**, ossia $\mathbf{x(x^3\text{-}2)}$=0, **cioè x=0** o $\mathbf{x^3=2}$ e infine **x=0** o **x=**$\sqrt[3]{2}$: questa è soluzione del problema della duplicazione del cubo ma è un <u>numero irrazionale</u>. Si è provato **solo nell'ottocento** che esso non si può costruire con riga e compasso.

2) *<u>Equazione della tangente alla parabola $\boldsymbol{\gamma_0}$ di equazione $\mathbf{y=ax^2}$ in un suo punto $\mathbf{P_0=(\alpha_0,\beta_0)}$</u>*.



Dal punto **3** del **§ 1** sappiamo che l'equazione cercata è quella della perpendicolare $\mathbf{t_0}$ per $\mathbf{P_0}$ alla retta **FH**. Il coefficiente angolare di questa è $\mathbf{m=}-\frac{1}{2a\alpha_0}$ (differenza delle ordinate/differenza delle ascisse) e quello di una perpendicolare – inverso e opposto - risulta **m□**$\mathbf{=2a\alpha_0}$.

Allora l' equazione cercata è:

$\mathbf{y\text{-}\beta_0=2a\alpha_0(x\text{-}\alpha_0)}$, cioè $\mathbf{y=2a\alpha_0x\text{-}2a\alpha_0^2+\beta_0}$.

Poiché $\mathbf{P_0}$ è un punto di $\boldsymbol{\gamma_0}$, le sue coordinate $\boldsymbol{\alpha_0}$ e $\boldsymbol{\beta_0}$ ne devono soddisfare l'equazione, cioè $\mathbf{\beta_0=a\alpha_0^2}$; così l'ultima equazione si può scrivere:

(•) $\mathbf{y=2a\alpha_0x\text{-}\beta_0}$ o $\mathbf{y=2a\alpha_0x\text{-}a\alpha_0^2}$.

<u>Questa è dunque l'equazione della retta tangente alla parabola</u> $\boldsymbol{\gamma_0}$ <u>di equazione</u> $\mathbf{y=ax^2}$ <u>in suo qualunque punto</u> $\mathbf{P_0=(\alpha_0,\beta_0)}$.

Esempi

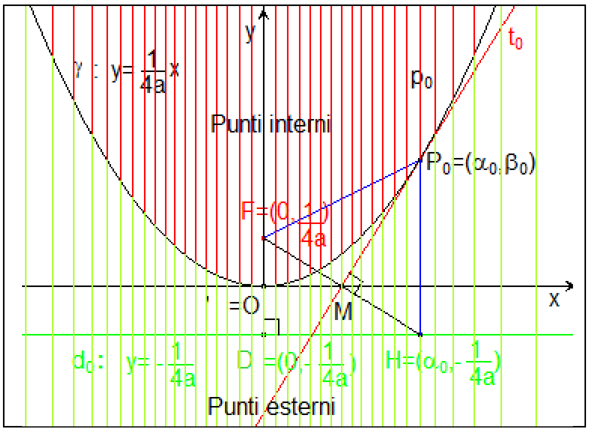
- Scrivere l'equazione della tangente alla parabola $\boldsymbol{\gamma_0}$: $\mathbf{y=\frac{1}{2}x^2}$ nel suo punto $\mathbf{T_0=(-2,2)}$.

  Dalla **(•)** otteniamo: $\mathbf{y=2\frac{1}{2}(-2)x-2}$, cioè $\mathbf{y=-2x-2}$, che è l'equazione cercata.

- Determinare le coordinate del punto $\mathbf{T_0}$ di contatto fra la retta $\mathbf{t_0}$: $\mathbf{y=-2x+2}$, tangente alla parabola $\boldsymbol{\gamma_0}$: $\mathbf{y=-\frac{1}{2}x^2}$, e questa.

  Come prima la tangente $\mathbf{t_0}$ a $\boldsymbol{\gamma_0}$ in un suo qualunque punto $\mathbf{P_0=(\alpha_0,\beta_0)}$ è $\mathbf{y=2(-\frac{1}{2})\alpha_0x-\beta_0}$, cioè $\mathbf{y=-\alpha_0x-\beta_0}$. Dal confronto con $\mathbf{y=-2x+2}$ otteniamo, dal principio d'identità dei polinomi, che $\boldsymbol{\alpha_0=2}$ e $\boldsymbol{\beta_0=-2}$; queste sono le coordinate cercate, quindi $\mathbf{T_0=(2,-2)}$.

3) *Equazioni delle tangenti a una parabola* $\boldsymbol{\gamma_0}$ *di equazione* $y=ax^2$ *per un punto a essa <u>esterno</u>.*



In genere nei libri di testo, per segnalare quali sono i punti *interni* a una parabola o a essa *esterni*, si fa leva sull'aspetto "oculistico". La seguente è una semplice dimostrazione.
Osserviamo innanzitutto che (figura), se $\mathbf{a>0}$, tracciata per un qualunque punto $\mathbf{P_0=(\alpha_0,\beta_0)}$ della parabola la perpendicolare $\mathbf{p_0}$ all'asse delle ascisse, questo determina su $\mathbf{p_0}$ due semirette aperte delle quali in una, $\mathbf{p_0}^{>}$ i punti hanno ordinata maggiore di $\boldsymbol{\beta_0}$, nell'altra, $\mathbf{p_0}^{<}$, i punti presentano ordinata minore di quella di $\boldsymbol{\beta_0}$. Al variare di $\mathbf{P_0}$ su $\boldsymbol{\gamma_0}$ l'insieme descritto da $\mathbf{p_0}^{>}$, sarà detto dei *punti interni* a essa, mentre quello determinato da $\mathbf{p_0}^{<}$ verrà chiamato dei punti esterni a essa. **Se** $\mathbf{a<0}$, sono *interni* i punti con ordinata *maggiore* di $\boldsymbol{\beta_0}$, *esterni* quelli con ordinata *minore* di $\boldsymbol{\beta_0}$.
Per trovare le equazioni delle tangenti alla parabola $\boldsymbol{\gamma_0}$: $\mathbf{y=ax^2}$, uscenti da un punto esterno $\mathbf{P=(\alpha,\beta)}$, oltre al consueto procedimento si può suggerire il seguente, che utilizza l'equazione della tangente in un punto della parabola già trovata.
Accertiamoci innanzitutto che il punto sia esterno a $\boldsymbol{\gamma_0}$, confrontando la sua ordinata $\boldsymbol{\beta}$ con quella della parabola che ha la stessa ascissa $\boldsymbol{\alpha}$. Scriviamo quindi l'equazione della tangente $\mathbf{t_0}$ a $\boldsymbol{\gamma_0}$ in un suo qualsiasi punto $\mathbf{P_0=(\alpha_0,\beta_0)}$, che possiamo scrivere $\mathbf{P_0=(\alpha_0, a\alpha_0^2)}$, poiché $\mathbf{P_0}$ sta su $\boldsymbol{\gamma_0}$ e ne soddisfa quindi l'equazione: **(*)** $\boldsymbol{\beta_0=a\alpha_0^2}$. Imponiamo che $\mathbf{t_0}$ passi per il punto $\mathbf{P}$. L'equazione di $\mathbf{t_0}$ sotto la forma (**) $\mathbf{y=2a\alpha_0x-a\alpha_0^2}$, deve essere verificata dalle coordinate di $\mathbf{P}$: $\boldsymbol{\beta=2a\alpha\alpha_0-a\alpha_0^2}$, da questa si ha:

$$\mathbf{a\alpha_0^2-2a\alpha\alpha_0+\beta=0.}$$

- Le soluzioni di questa equazione in $\boldsymbol{\alpha_0}$, $\boldsymbol{\alpha_{01}}$ e $\boldsymbol{\alpha_{02}}$, dànno i due valori che sostituiti in (*) forniscono le equazioni $\mathbf{t_1}$ e $\mathbf{t_2}$ delle tangenti da $\mathbf{P=(\alpha,\beta)}$.

- Inoltre, i due valori di $\boldsymbol{\alpha_0}$, $\boldsymbol{\alpha_{01}}$ e $\boldsymbol{\alpha_{02}}$, avvicendati in $\boldsymbol{\beta_0=a\alpha_0^2}$, consentono di determinare le coordinate dei punti $\mathbf{T_1}$ e $\mathbf{T_2}$ di contatto delle due tangenti con la parabola: $\mathbf{T_1=(\alpha_{01},a\alpha_{01}^2)}$ e $\mathbf{T_2=(\alpha_{02},a\alpha_{02}^2)}$.

Esempi

- Trovare le equazioni delle tangenti alla parabola $\boldsymbol{\gamma_0}$ di equazione (*) $\mathbf{y=}\frac{1}{2}\mathbf{x^2}$ condotte dal punto **T=(0,-2)** esterno (verificatelo).

  Sia $\mathbf{P_0}$ $=\boldsymbol{(\alpha_0,\beta_0)}$ un qualunque punto di γ_0; $\boldsymbol{\alpha_0}$ e $\boldsymbol{\beta_0}$ soddisfano la (*), quindi (**) $\boldsymbol{\beta_0}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha_0^2}$ e così $\mathbf{P_0=(}\boldsymbol{\alpha_0},\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha_0^2})$. Dalla **(•)** l'equazione della tangente $\mathbf{t_0}$ a $\boldsymbol{\gamma_0}$ in $\mathbf{P_0=(}\boldsymbol{\alpha_0},\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha_0^2})$ è:

  (≈) $\mathbf{y=2}\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha_0}\mathbf{x-}\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha_0^2}$**.** Imponendo che le coordinate di **T** la soddisfino, essa diventa:-2=-$\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha_0^2}$, ossia $\boldsymbol{\alpha_0^2}\mathbf{=4}$, cioè $\boldsymbol{\alpha_0}\mathbf{=\pm 2}$. Sostituendo questi valori nella **(≈)** otteniamo le equazioni delle due tangenti $\mathbf{t_1}$: **y= -2x-2** e $\mathbf{t_2}$: **y= 2x-2**.

  <u>Troviamo ora le coordinate dei punti $\mathbf{T_1}$ e $\mathbf{T_2}$ di contatto</u>. Sostituendo i due valori di $\boldsymbol{\alpha_0}$ in **(**)**, otteniamo che $\mathbf{T_1=(-2,2)}$ e $\mathbf{T_2=(2,2).}$

- Scrivere le equazioni delle tangenti alla parabola $\boldsymbol{\gamma_0}$ di equazione $\mathbf{y=-}\frac{1}{4}\mathbf{x^2}$ tracciate dal punto **T= (-1,2)** esterno (verificatelo).

  Dalla **(•)** $\mathbf{y=2a}\boldsymbol{\alpha_0}\mathbf{x-a}\boldsymbol{\alpha_0^2}$, l'equazione della tangente $\mathbf{t_0}$ a $\boldsymbol{\gamma_0}$ in un suo qualunque punto $\mathbf{P_0=(}\boldsymbol{\alpha_0,\beta_0})$, in cui da (*) $\boldsymbol{\beta_0}\mathbf{=-}\frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha_0^2}$, è: **(≈)** y=2(-$\frac{1}{4}$)$\boldsymbol{\alpha_0}$x+$\frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha_0^2}$, cioè $\mathbf{y=}\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha_0}\mathbf{+}\frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha_0^2}$,

  Imponendo che essa sia soddisfatta dalle coordinate di **T= (-1,2)**, abbiamo: 2=$\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha_0}\mathbf{+}\frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha_0^2}$, cioè $\boldsymbol{\alpha_0^2}\mathbf{+2}\boldsymbol{\alpha_0}\mathbf{-8=0}$. Risolvendola otteniamo i valori $\boldsymbol{\alpha_0}\mathbf{=4}$ e $\boldsymbol{\alpha_0}\mathbf{=-2}$ che, sostituiti nella **(≈)**, forniscono le equazioni delle due tangenti dal punto **T= (-1,2)**: **y=-2x-4** e **y= -x+1**.

  <u>Determiniamo le coordinate dei punti $\mathbf{T_1}$ e $\mathbf{T_2}$ di contatto</u>. Sostituendo i due valori di $\boldsymbol{\alpha_0}$ in **(*)**, otteniamo che $\mathbf{T_1=(4,-4)}$ e $\mathbf{T_2=(-2,1)}$.

§ 3

1) <u>*Equazione di una parabola γ con l'asse di simmetria a parallelo all'asse*</u> $\vec{y}$.

Riprendiamo alcune proprietà della *traslazione*, che saranno molto utili per il nostro scopo:

- muta rette in rette parallele;
- trasforma segmenti in segmenti equipollenti.

Sappiamo poi che le equazioni della traslazione $\boldsymbol{\tau}$ che trasforma l'origine **O=(0,0)** nel punto $\mathbf{O'=(x_0,y_0)}$ sono:

$$(*)\quad \begin{cases} \mathbf{x'=x+x_0} \\ \mathbf{y'=y+y_0.} \end{cases}$$

Esse dànno le coordinate di $\mathbf{P'=(x',y')}$ traslato di un punto **P=(x,y)**. Dalla **(*)** otteniamo

$$\mathbf{(**)}\quad \begin{cases} \mathbf{x=x'-x_0} \\ \mathbf{y=y'-y_0}. \end{cases}$$

Queste permettono di determinare l'equazione della traslata in $\boldsymbol{\tau}$ di una curva di data equazione, sostituendo $\mathbf{x'-x_0}$ a **x** e $\mathbf{y'-y_0}$ a **y**.

In relazione alle (**) osserviamo che il sistema di coordinate non è cambiato, perché **τ** è una traslazione del piano, non degli assi coordinati. E l'apice in **x**′ e y′ indica solo la nuova posizione **P**′ di **P**; ma, avvenuta la redistribuzione dei punti nel piano, l'apice perde il suo ruolo, e quindi le equazioni **(**)** si possono scrivere senza apice, come sostituzioni di **x** con **x-x_0** e **y** con **y-y_0**, che indichiamo come segue:

$$(\$)\quad \begin{cases} x \to x - x_0 \\ y \to y - y_0. \end{cases}$$

Consideriamo ora la traslazione **τ** che muta **O=(0,0)** in un generico punto **$V=(x_v,y_v)$** e determiniamo l'equazione della curva γ immagine in **τ** della parabola γ_0: **$y=ax^2$**. Come abbiamo appena visto, l'equazione di γ si ottiene da **$y=ax^2$** mediante le sostituzioni:

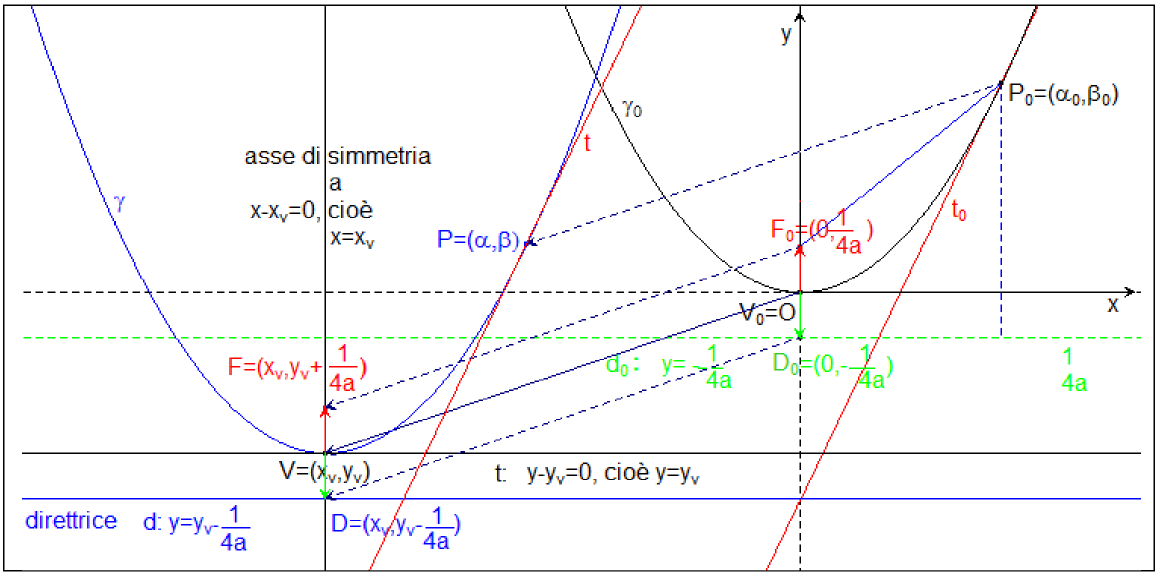
$$(***)\begin{cases} x \to x - x_v \\ y \to y - y_v. \end{cases}$$

Essa assume così la forma:

$$(\#)\ y - y_v = a(x - x_v)^2.$$

Poiché **τ** è un'isometria - mantiene quindi invariate le distanze - quest'equazione rappresenta ancora una parabola in forza della definizione. Per le proprietà della traslazione individuata dalle **(***)**, γ ha le seguenti caratteristiche: (figura sotto)

1. Le coordinate di **$V=(x_v,y_v)$** sono quelle del vertice.
2. Il fuoco **$F=(x_f,y_f)$** ha coordinate **$x_f=x_v$** e **$y_f = y_v$ +(1/4a)** ($\overrightarrow{VF}$ è equipollente a $\overrightarrow{V_0F_0}$).



   L'equazione della tangente **t** nel vertice, traslata dell'asse $\vec{x}$ **-** che ha equazione **y=0** – per la seconda delle **(***)**, è **y-y_v=0**, ossia **$y=y_v$** (parallela all'asse $\vec{x}$: una retta si trasforma in una parallela).
3. Detto **D** il traslato di **D_0** (intersezione dell'asse $\vec{y}$ con la direttrice **d_0**: **y=-1/4a**), **$D=(x_v, y_v$ -1/4a)**, perché $\overrightarrow{VF}$ è equipollente $\overrightarrow{V_0F_0}$; quindi l'equazione della direttrice **d** è:
   $y= y_v$-1/4a.
4. **V** è il punto medio del segmento **FD**, da cui: **y_V**=$\dfrac{y_F+y_D}{2}$.

Osservazione

Poiché **$y=ax^2$** ($a\neq0$) <u>rappresenta tutte e sole le parabole col fuoco sull'asse</u> $\vec{y}$ <u>e direttrice parallela all'asse</u> $\vec{x}$, l'equazione **$y-y_v=a(x-x_v)^2$** <u>esprime tutte e sole le parabole γ che hanno</u>

fuoco in un qualsiasi punto **F** del piano e direttrice **d** parallela all'asse $\vec{x}$; il vertice è **V=(x_v,y_v)**.
Se nella (#) svolgiamo i calcoli, otteniamo:

$$y-y_v=ax^2-2ax_vx+ax_v^2 \text{ o anche } y=ax^2-2ax_vx+ax_v^2+y_v,$$

il cui secondo membro è un polinomio di secondo grado; l'equazione è così del tipo:

$$(\&)\ y=ax^2+bx+c.$$

Affinché i secondi membri delle ultime due equazioni coincidano, per il principio d'identità dei polinomi, deve essere:

- $b=-2ax_v$, da cui $x_v=-b/2a$;
- $c=ax_v^2+y_v$, che per la precedente diventa $c=a(-b/2a)^2+y_v$ da cui $y_v=c-a\dfrac{b^2}{4a^2}$, cioè

  $y_v=c-\dfrac{b^2}{4a}$ e infine: $y_v=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ o anche: $y_v=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$.

Facciamo notare esplicitamente che, trovata l'ascissa x_v del vertice, la sua ordinata y_v si può ottenere sostituendo il valore di x_v al posto di x in $y=ax^2+bx+c$, poiché il vertice è un punto della parabola e quindi le sue coordinate ne devono soddisfare l'equazione: $y_v=y(x_v)$.

Esempio
In $y=x^2-4x+3$, $x_v=b/2a=2$ e quindi $y_v=y(2)=2^2-8+3$, da cui $y_v=-1$.

Le considerazioni precedenti assicurano che l'equazione $y=ax^2+bx+c$ rappresenta nel piano cartesiano una parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse $\vec{y}$; le coordinate del suo vertice sono:

$$\begin{cases} x_v=-b/2a \\ y_v=y(x_v)=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}. \end{cases}$$

I precedenti punti 2. e 4. consentono di scrivere espressamente, *se servono*, l'ordinata del fuoco e l'equazione della direttrice (l'ascissa del fuoco è uguale a quella del vertice):

- $y_f = y_v + 1/4a$, cioè $y_f=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}+\dfrac{1}{4a}$.
- L'equazione della direttrice è: $y=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}-\dfrac{1}{4a}$.

N.B.
L'equazione della parabola sotto la forma $y-y_v=a(x-x_v)^2$ e le relazioni che coinvolgono fuoco, direttrice e vertice:

- $x_f = x_v = -b/2a$
- l'equazione dell'asse di simmetria $x=-b/2a$
- $y_f = y_v+1/4a$
- $y_V\ \dfrac{y_F+y_D}{2}$
- **equazione della direttrice** $y= y_v-1/4a$,

consentono di risolvere, con pochi calcoli, molti problemi relativi alla parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse $\vec{y}$.

Prima di qualche altro esempio due riflessioni e una **osservazione** che permette di trovare le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice, usando i punti 2. e 4. precedenti.

- La parabola di equazione $\mathbf{y=ax^2+bx+c}$ è chiaramente legata all'equazione generale di secondo grado $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$.
- Essa permette inoltre di svolgere in modo semplice e chiaro il segno di un polinomio di secondo grado $\mathbf{ax^2+bx+c}$, quindi di risolvere le disequazioni di secondo grado, soprattutto se associata all'uso di *sofware* dinamici che determinano luoghi anche di semirette o segmenti.

Queste riflessioni suggeriscono che sarebbe opportuno introdurre la parabola prima della circonferenza nello studio delle coniche.

Osservazione

Sia $\mathbf{T(x)=ax^2+bx+c}$ un trinomio di secondo grado con $\mathbf{\Delta\neq 0}$. Mediante il *completamento del quadrato* $\mathbf{T(x)}$ si può scrivere come differenza o somma di quadrati. Qualche esempio.

$\mathbf{T_1(x)=x^2-6x+5}$. $\mathbf{T_1(x)=x^2-2\cdot 3x+5=x^2-2\cdot 3x+9-9+5=(x^2-2\cdot 3x+9)-9+5}$;cioè $\mathbf{T_1(x)=(x-3)^2-4}$.

$\mathbf{T_2(x)=x^2-3x+4}$. $\mathbf{T_2(x)=}\, x^2-2\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+4$, da cui $\mathbf{T_2(x)=}\,(x-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}$.

$\mathbf{T_3(x)=2x^2-3x+1}$. Moltiplicando e dividendo per **2** coefficiente di $\mathbf{x^2}$, $\mathbf{T_3(x)=2(}\,x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\mathbf{)}$

che, in virtù del procedimento precedente, diventa $\mathbf{T_3(x)}=\mathbf{2(}\,x^2-2\frac{3}{4}x+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}+\frac{1}{2}\mathbf{)}$, ovvero

$\mathbf{T_3\ (x)}=\mathbf{2}[(x^2-2\frac{3}{4}x+\frac{9}{16})-\frac{1}{16}]$, quindi $\mathbf{T_3(x)=2}(x-\frac{3}{4})^2-\frac{1}{4}$ (**2** è quadrato di $\sqrt{2}$).

Le considerazioni precedenti consentono di scrivere le parabole di equazione $\mathbf{y=x^2-6x+5}$, $\mathbf{y=x^2-3x-4}$ e $\mathbf{y=2x^2-3x+1}$ sotto la forma $\mathbf{y-y_v=a(x-x_v)^2}$, che permette di ottenere facilmente coordinate del vertice e del fuoco ed equazione della direttrice.

Per $\mathbf{y=x^2-6x+5}$, abbiamo $\mathbf{y=(x-3)^2-4}$, cioè $\mathbf{y+4=(x-3)^2}$. Da cui $\mathbf{x_v=3,\ y_v=-4,\ x_f=x_v=3}$; da 2. del **§** 3 $\mathbf{y_f=y_v+(1/4a)}$ che, per noi diventa: $\mathbf{y_f=-4+1/4}$, ossia $\mathbf{y_f=-17/4}$. Da 3. **§** 3, la direttrice ha equazione $\mathbf{y=y_v-1/4a}$, che dà $\mathbf{y=-4-1/4}$, quindi $\mathbf{y=-17/4}$.

Analogamente l'equazione $\mathbf{y=x^2-3x+4}$ si può scrivere: $\mathbf{y}=(x-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}$, dalla quale si ha $\mathbf{y}-\frac{7}{4}=(x-\frac{3}{2})^2$. Così: $\mathbf{x_f=x_v}=\frac{3}{2}$ e $\mathbf{y_v}=\frac{7}{4}$; il fuoco ha ordinata $\mathbf{y_f}=\frac{7}{4}+\frac{1}{4}$, cioè $\mathbf{y_f=2}$ e l'equazione della direttrice **d** è $\mathbf{y}=\frac{7}{4}-\frac{1}{4}$, ossia $\mathbf{y}=\frac{3}{2}$.

Per i problemi di "passaggio per punti" o "altro" si può usare la $\mathbf{y=ax^2+bx+c}$.

Qualche altro esempio.

1) Equazione della parabola noto il vertice $\mathbf{V=(2,-1)}$ e passante per $\mathbf{A=(-1,8)}$.
   Da $\mathbf{y-y_v=a(x-x_v)^2}$ deriva $\mathbf{y+1=a(x-2)^2}$; imponiamo in questa il passaggio per **A**: $\mathbf{8+1=a(-1-2)^2}$, da cui $\mathbf{a=1}$: quindi l'equazione cercata è $\mathbf{y=x^2-4x+3}$.
2) Equazione di una parabola di fuoco $\mathbf{F=(4,5)}$ e direttrice di equazione $\mathbf{y=1}$.
   Si ha $\mathbf{x_v=x_f=4}$; inoltre $\mathbf{y_V}=\frac{y_F+y_D}{2}$, quindi $\mathbf{y_V}=\frac{5+1}{2}=\mathbf{3}$. Da $\mathbf{y-y_v=a(x-x_v)^2}$, l'equazione è (*) $\mathbf{y-3=a(x-4)^2}$; e, dato che $\mathbf{y_f=y_v+1/4a}$, si ha $\mathbf{5=3+}\frac{1}{4a}$, cioè

$20a=12a+1$, da cui **$a=\frac{1}{8}$** che sostituito nella (*) dà **$y-3=\frac{1}{8}(x-4)^2$** cioè, svolgendo i semplici calcoli, **$y=\frac{1}{8}x^2-x+5$.**

3) Trovare coordinate di vertice **V** e fuoco **F** della parabola di equazione: **$y=x^2-4x+3$**; determinare inoltre le equazioni dell'asse di simmetria e della direttrice.
L'ascissa di **V** è **$x_v=-b/2a$**, cioè **$x_v=2$**; l'ordinata **$y_v=y(x_v)=4-8+3$**, quindi **$y_v=-1$**.
L'ascissa di **F** è **$x_f=x_v=2$**; la sua ordinata è **$y_f=y_v+1/4a$**, cioè **$y_f=-1+1/4=-3/4$**.
L'equazione dell'asse di simmetria è **$x=x_v$**, ossia **$x=2$**, e l'equazione della direttrice è **$y=y_v-1/4a$**, che nel nostro caso diventa **$y=-1-1/4$**, ossia **$y=-5/4$**.
Oppure col completamento del quadrato.
Da **$y=x^2-4x+3$** possiamo scrivere **$y=x^2-4x+4-4+3$**, cioè **$y+1=(x-2)^2$**; da cui **$x_v=x_f=2$**, **$y_v=-1$**, **$y_f=y_v+1/4a$**, cioè **$y_f=-1+1/4=-3/4$**, l'equazione dell'asse di simmetria è **$x=x_v$**, ossia **$x=2$**, e l'equazione della direttrice è **$y=y_v-1/4a$**, ovvero **$y=-1-1/4=-5/4$**

§ 4

Equazione della tangente alla parabola γ: $y=ax^2+bx+c$ in un suo punto $P=(\alpha,\beta)$.

Ci serviremo ancora della traslazione **τ** di equazioni

$$\begin{cases} x'=x+x_v \\ y'=y+y_v \end{cases}$$ da cui derivano le sostituzioni $$\begin{cases} x\rightarrow x-x_v \\ y\rightarrow y-y_v \end{cases}$$ che permettono di traslare una curva.

Tenendo ora conto che in **τ** un punto **$P_0=(\alpha_0,\beta_0)$** del piano si trasforma in **$P=(\alpha,\beta)$** tale che

$$\begin{cases} \alpha=\alpha_0+x_v \\ \beta=\beta_0+y_v \end{cases}$$ abbiamo che: $$\begin{cases} \alpha_0=\alpha-x_v \\ \beta_0=\beta-y_v. \end{cases}$$

Mediante **τ**, da **γ_0**: **$y=ax^2$**, abbiamo ottenuto l'equazione della parabola traslata **γ** di l'equazione **$y-y_v=a(x-x_v)^2$**, il cui asse di simmetria è parallelo all'asse $\bar{y}$; essa si può scrivere come **$y=ax^2+bx+c$**. Indicato poi con **$P=(\alpha,\beta)$** un qualunque punto di **γ**, sia **$P_0=(\alpha_0,\beta_0)$** il punto di **γ_0** che ha per immagine in **τ** **$P=(\alpha,\beta)$**. Sappiamo che l'equazione della tangente **t_0** a **γ_0** in **$P_0=(\alpha_0,\beta_0)$** è: **$y=2a\alpha_0x-\beta_0$**; allora <u>l'equazione della tangente a γ in **$P=(\alpha,\beta)$** è quella della retta **t** che passa per esso ed è parallela a **t_0**</u>, perché in una traslazione una retta ha per corrispondente una retta parallela. Il coefficiente angolare di **t_0** è **$m=2a\alpha_0$** che, essendo **$\alpha_0=\alpha-x_v$** diventa **$m=2a(\alpha-x_v)$**; di conseguenza, l'equazione di **t** è:

$$y-\beta=2a(\alpha-x_v)(x-\alpha).$$

<u>Questa è dunque l'equazione della retta tangente alla parabola γ: **$y=ax^2+bx+c$** in un suo punto **$P=(\alpha,\beta)$.**</u>

Per ciò che riguarda punti interni o esterni e le tangenti alla parabola **γ**, valgono le argomentazioni esposte per la parabola **γ_0**.

Esempi

1) Scrivere l'equazione della tangente alla parabola **γ: $y=x^2-4x+3$**, nel suo punto **$A=(0,3)$**.

L'ascissa del vertice **V** è **$x_v=-b/2a=2$** e il suo coefficiente angolare **$m=2a(\alpha-x_v)=2(0-2)=-4$**; l'equazione della tangente in A è allora: **$y-3=-4x$**, cioè: **$y=-4x+3$**

Per quanto riguarda le equazioni delle tangenti a una parabola del tipo **$y=ax^2+bx+c$** condotte da un punto a essa esterno, si può procedere in analogia a ciò che si è fatto per **$y=ax^2$**.

2) Scrivere le equazioni delle tangenti alla parabola **γ**: **$y=-x^2-2x+3$**, condotte dal punto **$P=(-3,1)$** (esterno a **γ** come è facile verificare).

L'equazione della tangente **t** a **γ** in un suo punto **A=(α,β)** è, **y-β=2a(α-x$_v$)(x-α)**; troviamo per primo l'ascissa del vertice, **x$_v$=-b/2a**, **x$_v$=-1.** L'equazione di diventa: **y-β=-2(α+1)(x-α)**. Imponiamo che la retta **t** passi per **P=(-3,1)**, sostituendo le sue coordinate nell'equazione, abbiamo: (*) **y-β=-2(α+1)(x-α)**. Poiché **A** sta sulla parabola, (#) **β=-α^2-2α+3**, così l'equazione, diventa **1-β=-2(α+1)(-3-α)** cioè **α^2+2α-2=-2(-a^2-4a-3)** che, svolgendo i calcoli dà: **α^2+6α+8=0**. Risolvendo questa otteniamo i valori **α$_1$=-2 e α$_2$=-4** che:

- Sostituiti nella (*) forniscono le equazioni delle rette tangenti **t$_1$** e **t$_2$** a **γ** uscenti da **P=(-3,1)**, che risultano: **y=2x+7** e **y=6x+19**.
- Messi al posto delle in (#) permettono di <u>determinare le coordinate dei punti di contatto</u> **T$_1$=(-2,3)** e **T$_2$=(-4, -5)** delle due tangenti con la parabola.

Molteplici sono le applicazioni della parabola. Ne segnaliamo alcune.
Con antenne o specchi parabolici molto grandi si raccolgono, nel fuoco, deboli segnali di eventi lontanissimi nello spazio e nel tempo.
Diverse sono poi in fisica le leggi che si esprimono mediante funzioni paraboliche:

- In cinematica, nel moto con accelerazione costante **a**, lo spazio è funzione del tempo: $\mathbf{s}=\frac{1}{2}\mathbf{at^2+v_0t+s_0}$, dove **v$_0$** ed **s$_0$** indicano rispettivamente velocità e spazio al tempo **t=0**.
- Ancora in cinematica, l'accelerazione centripeta di un punto materiale è **a$_c$=ω^{2}r**, dove **ω** è la velocità angolare del punto ed **r** la sua distanza dal centro di rotazione.
- L'energia cinetica di una particella di massa **m** è $\mathbf{E_c}=\frac{1}{2}\mathbf{mv^2}$.

(L'insegnante saprà presentare altri esempi significativi).

Concludiamo questa proposta didattica evidenziando due aspetti di quella che il premio Nobel per la fisica del 1983, **Wigner** definisce la "*irragionevole efficacia*" del linguaggio della matematica nella formulazione delle leggi della natura.
Il primo è indicato da Galileo nel celebre passo de *Il Saggiatore*: in cui sostiene che
«…il grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto».
Il secondo è ancora più *stupefacente*: concetti e relazioni che i matematici studiano per considerazioni ed esigenze che non hanno a prima vista legami con eventuali applicazioni, si *rivelano a distanza di decenni o addirittura di secoli soluzioni inaspettate di problemi che hanno le loro radici nella realtà fisica*.
Le coniche ne rappresentano un esempio significativo.
Galileo trovò che l'equazione della <u>parabola rappresenta il moto uniformemente accelerato</u>, a esempio dei proiettili e più in generale dei corpi che si muovono in vicinanza della Terra.
La legge di Boyle, che <u>regola come variano pressione e volume di un gas (ideale) se la temperatura è tenuta costante, riproduce un'iperbole equilatera</u>.
Keplero <u>scoprì che le orbite dei pianeti sono ellissi di cui il sole occupa uno dei fuochi</u>, e *Newton* <u>aprì lo scrigno che conteneva i segreti del moto dei corpi del sistema solare</u>:
sono trascorsi quasi duemila anni da Menecmo!
<u>Vi esortiamo a riflettete su questo</u>.

Alfio Grasso