LA MATEMATICA **È** *UN'OPINIONE*

PREMESSA

La maggior parte di voi è di tutt'altra…*opinione*. Infatti si sono imposti nel tempo luoghi comuni ben noti: «se la matematica non è un'opinione», si dice; e si parla di «certezza matematica», «verità matematica», come di cosa che non può essere neppure *sfiorata* dal dubbio. E si fa della matematica, della geometria in particolare, una maestosa signora, piena di dignità e tutta vestita di bianco: il colore che le si addice, come afferma **Dante** nel Convivio, «in quanto è senza macula d'errore e certissima per sé…».
In essa, sempre secondo il pensiero corrente, è bandita *ogni libertà d'invenzione*, essendo il regno della *logica indefettibile*.
Mi propongo di fare un poco di chiarezza riguardo all'affermazione del titolo e al pensiero corrente.
Matematica.

- **Qual è l'origine del termine**?
  Malgrado abbiamo studiato *matematica* dalla prima elementare, forse la maggior parte di noi non conosce il suo significato etimologico, cioè originario, vero: il termine **matematica** deriva dal greco antico ***μάθημα*** (máthema) che significa *conoscenza*, *apprendimento*; precisamente i greci la chiamavano *mathematiké tékne*, cioè *l'arte*, la *tecnica* della conoscenza, e la tenevano quindi in grande considerazione (**Platone** nella *Repubblica*).

Che cosa è?

- **Galileo**, ne *Il Saggiatore*, uno dei suoi tanti scritti, pregevoli sia per il contenuto scientifico sia per forma letteraria, scrive:
  «La filosofia (al tempo di Galileo il termine significava **scienza**) *è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo) e non lo si può intendere se non s'impara a intendere la lingua e a conoscere i caratteri in cui è scritto. Esso è scritto in* ***lingua matematica****, e i suoi caratteri sono triangoli, cerchi e altre figure, senza i quali mezzi sarebbe come aggirarsi vanamente in un oscuro laberinto».*
  Dunque, per Galileo, credente convinto, la matematica è il linguaggio con cui Dio ha strutturato l'Universo.
- Per i **positivisti** invece la nostra ragione riesce a cogliere la struttura profonda dei fenomeni, perché essa coincide col principio razionale costitutivo dell'universo.
- **Einstein** si chiedeva:
  «Com'è possibile che la matematica, un ***prodotto della mente umana****, si accordi in maniera eccellente con gli oggetti della realtà fisica »?*
  Per Einstein quindi la matematica è un aspetto della creatività umana, come la letteratura, l'arte visiva, la musica.

Comunque la si pensi, la matematica consiste, come ha scritto l'insuperato **Archimede** a **Eratostene** ne *Il Metodo*, nell'acquisire un abito mentale, un metodo che permette di affrontare e risolvere problemi (non solo di carattere scientifico) mediante cui l'uomo:

- *Osserva analogie,* somiglianze di situazioni che possono prospettare soluzioni.
- *Propone congetture,* ipotesi su proprietà generali che sono vere in casi particolari.
- *Avanza predizioni*. Formula, sulla base delle conoscenze acquisite, nuove ipotesi.
- *Dimostra teoremi*. Ottiene così **nuove** conoscenze dalle premesse.

A ciò dobbiamo aggiungere, si è fatto però ventidue secoli dopo Archimede:

- *Indaga* i principi generali delle sue proposizioni con un'attenta analisi critica.

Essa è stata ed è, in genere, fortemente legata all'esperienza e alle caratteristiche della comunità che l'ha prodotta e ne esprime le istanze socio-culturali.

A che «serve»?
In relazione alla domanda il premio Nobel per la Fisica **Eugene Wigner** si stupisce *dell'irragionevole efficacia della matematica* nella descrizione dei fenomeni naturali e ne presenta due aspetti, uno che chiamiamo *attivo*, l'altro che denominiamo *passivo*.
Il primo.
È stupefacente che i suoi *linguaggi* abbiano trovato e trovino applicazione nei campi più disparati, non solo dell'ambito scientifico com'è da sempre, ma anche in aree che a prima vista sembrerebbero refrattarie a una trattazione matematica o lontane dalla sua sfera d'indagine. Infatti, la matematica ha fornito e fornisce adeguati strumenti per studiare il moto dei corpi celesti e la formazione dell'universo, le onde elettromagnetiche e l'interno del nucleo atomico, le varie scienze. Inoltre, soprattutto nel secolo scorso, è straripata e reso fertili nuovi campi, alcuni non ancora *dissodati* per mancanza di adeguati *attrezzi* matematici, altri appartenenti addirittura al "mondo umanistico". Infatti, la sua linfa vitale ha prodotto frutti generosi e inaspettati in: **Antropologia, Archeologia**, **Astronomia, Biologia, Demografia, Economia, Informatica, Linguistica, Meteorologia, Musica, Psicologia, etc**. Tale linfa è stata continuamente rigenerata da intuizioni originali e "fantastiche" dei matematici, con la scoperta e l'invenzione di strutture e strumenti sempre nuovi.
Un esempio per tutti.
Nella seconda metà del XIX secolo il grande matematico **Cantor** ha "osato" congetturare e poi dimostrare che negli insiemi infiniti esiste una *gerarchia*, cioè esistono infiniti più infiniti di altri infiniti.
Il secondo è ancora più stupefacente del primo.
Concetti e relazioni che i matematici studiano per considerazioni ed esigenze che non hanno a prima vista legami con eventuali applicazioni, si *rivelano a distanza di secoli, o addirittura di millenni, soluzioni inaspettate di problemi che hanno le loro radici nella realtà fisica*.
Le coniche ne rappresentano un esempio indicativo.
Menecmo, intorno al 350 a.C., aveva scoperto le coniche, parabola, ellisse, iperbole, nella ricerca di una soluzione del problema della duplicazione del cubo.
Galileo trovò che l'equazione della parabola rappresenta il moto uniformemente accelerato, a esempio dei proiettili e più in generale dei corpi che si muovono in vicinanza della Terra.
La legge di Boyle, che regola come variano pressione e volume di un gas (ideale) se la temperatura è tenuta costante, riproduce un'iperbole equilatera.
Keplero scoprì che le orbite dei pianeti sono ellissi di cui il sole occupa uno dei fuochi.
Sono trascorsi quasi duemila anni da Menecmo!
Altro esempio significativo.
Nel terzo secolo a.C. **Crisippo**, filosofo e logico stoico, forgiò gli elementi essenziali della logica delle proposizioni composte che usiamo tutt'oggi: le definizioni dei connettivi, gli assiomi e le regole di deduzione. Essi sono stati usati per l'architettura software del computer!
Ultimo esempio interessantissimo, la *teoria dei gruppi* di **Galois** (1811-1832).
Dopo che i matematici italiani del cinquecento avevano trovato le formule risolutive delle equazioni algebriche di *terzo* e *quarto* grado per mezzo di radicali, ci fu la <<corsa>> per risolvere, sempre mediante i radicali, le equazioni algebriche di grado superiore al quarto. Tre secoli di sforzi titanici da parte della *crema* dei matematici fallirono miseramente, fino a quando il precocissimo genio di Evarist Galois (1811-1832), con un approccio radicalmente innovativo, creò un nuovo ramo della matematica, fiorito in seguito in modo straordinario – **la teoria dei gruppi** – che ha trovato e trova ancora oggi applicazioni in campi disparati, insospettabili e sorprendenti della matematica e delle scienze in genere. Ecco alcuni significativi esempi:
Cristallografia, **geometria nel piano e nello spazio**, **algebra elementare e algebra astratta** (in cui ci si occupa di "operazioni" e "relazioni" fra insiemi di elementi di natura qualsiasi), **decorazioni murali e piastrellazioni** e, *incredibile ma vero*, anche in **diverse teorie di fisica delle particelle elementari** (elettroni, quark e…" minicompagni").

Le affermazioni precedenti su «certezza matematica» e «verità matematica», traggono origine dal fatto che la prima disciplina matematica a essere esposta in maniera organica, con concetti primitivi, postulati e leggi logiche di deduzione fu la Geometria, intorno al 300 a.C., con gli *Elementi* di **Euclide**. La loro architettura assiomatico-deduttiva ha costituito il paradigma anche di altre discipline scientifiche, matematiche e non solo per circa duemila anni e costituisce tutt'oggi un *best seller*, essendo il libro più letto e tradotto dopo la Bibbia. (**Spinoza** nell'*Etica more geometrico demonstrata*, ritiene di avere **dimostrato (sic!)** l'esistenza di Dio utilizzando il modello euclideo. **Boole**, due secoli dopo, dimostrerà che la dimostrazione è sbagliata).
Prima di esaminare gli *Elementi* per i nostri scopi vorrei proporre qualche considerazione sull'aritmetica.
Le dita delle mani costituiscono l'umile base del sistema di numerazione più noto, quello in base dieci. La parola egiziana per 10 significa propriamente «dita» e si riferisce chiaramente alle dita delle mani: *un'opinione*.
C'è un antico verbo greco *pentázein*, che significa "contare" per cinque. È ragionevole pensare che esso derivi dal fatto che quando l'uomo primitivo andava a caccia teneva in una mano una pietra, un bastone e se incontrava un branco di animali non posava di certo l'oggetto di offesa e difesa e si metteva quindi a contare con le dita di una sola mano. In questo caso noi diremmo che il suo sistema di numerazione possedeva solo le cinque cifre 0, 1, 2, 3, 4. Ci sono poi dei graffiti in cui viene indicato questo tipo di conteggio: 卌 卌 |||. Noi contiamo tredici e scriviamo **13**, cioè *una decina* più *tre unità*. Ma il nostro antenato, nel suo sistema di numerazione quinaria, cioè in base cinque, conterebbe due *cinquine* più *tre unità* e scriverebbe **23_{cique}, si legge due tre in base cinque**: *un'altra opinione*.
Presso alcuni popoli sono state utilizzate anche le dita dei piedi: ciò ha condotto al sistema vigesimale, cioè in base venti.
In francese a esempio ottanta si dice *quatre-vingts*, cioè quattro volte venti. Ciò indica chiaramente che tra i popoli che abitavano anticamente l'attuale Francia doveva esserci un sistema di numerazione in base venti: ancora *un'opinione*.
Gli Assiro-babilonesi ne possedevano uno sessagesimale, cioè in base sessanta, di probabile origine astronomica: *diversa opinione*.
Ancora. Supponiamo di essere su una nave e viaggiare lungo l'equatore. Se ci troviamo alla longitudine di 320° e proseguiamo verso est di altri 40°, alla fine saremo alla longitudine 320°+ 40°=0°: *un'altra opinione*.
Gli esempi portati dànno un'idea del significato dell'affermazione iniziale. Per chiarirla meglio prendiamo le mosse proprio dagli *Elementi*. Essi sono la *summa* di circa tre secoli di ricerche matematiche, strutturate però in modo assolutamente innovativo e rivoluzionario, con l'esposizione iniziale di **termini**, **postulati**, **nozioni comuni**.
I **termini** contengono, oltre ai concetti primitivi, cioè concetti fondamentali, ammessi come patrimonio comune, diverse definizioni, a esempio quella di *triangolo*…..
I **postulati** (o **assiomi**) sono proposizioni che legano i concetti primitivi precisandone le caratteristiche: *si richiede di accettare che siano vere.*
Le nozioni comuni sono proposizioni logiche, quindi valide per ogni disciplina, che *si postula di ammettere siano vere.*
Linguaggi naturali e linguaggi matematici.
Prima di affrontare il problema della scelta di termini, postulati e nozioni comuni è interessante una digressione sulle analogie fra un linguaggio matematico e uno naturale, alfabetico o ideografico.
Per noi occidentali è più facile il confronto con uno alfabetico. Considereremo il linguaggio geometrico di Euclide e quello aritmetico dei numeri naturali.

	Termini primitivi	
Linguaggio naturale	**Linguaggio aritmetico**	**Linguaggio geometrico**
Simboli delle lettere …	Simboli numerici…	Punto, linea…
	Postulati	

Modalità con cui associare le lettere per formare le parole...	Operazioni e loro proprietà	Quelli euclidei
………………………………………	………………………………………	………………………………………

Anche i linguaggi naturali presentano termini primitivi, assiomi e nozioni comuni.
Torniamo alla geometria
<u>Come si fa a scegliere i termini fondamentali, le proposizioni che devono essere costituite da proprietà della disciplina che tutti accettiamo per vere e le proposizioni logiche di carattere generale che siamo disposti ad ammettere come vere</u>?
Riferiamoci ai postulati (o assiomi) perché ci consentono meglio di chiarire il senso del titolo.
Euclide scelse i concetti primitivi astraendoli da proprietà dello spazio che ci circonda facili da accettare in quanto si riferiscono a esperienze comuni, cioè *intuitivi*.
Analoga scelta fece per le proprietà che esprimono i postulati – ne assegnò cinque – di cui però il V *meno evidente*.
Questi erano poi *coerenti*, cioè non presentavano o comportavano contraddizioni.
"Risulti postulato che:

1. **Si possa condurre una linea retta da qualsiasi punto a ogni altro punto.**
2. **E che ogni retta terminata si possa prolungare continuamente per dritto.**
3. **E che con ogni centro e con ogni distanza si possa descrivere un circolo.**
4. **E che tutti gli angoli retti siano uguali tra di loro.**
5. **E che per un punto non appartenente a una retta si possa condurre una e una sola retta parallela alla retta data.”**

Facciamo alcune riflessioni su questi postulati.
Per il quinto, come si è detto, le cose si complicano perché, essendo una retta terminata (noi lo chiamiamo segmento) prolungabile indefinitamente dai due lati, viene coinvolto il concetto d’infinito che bisogna maneggiare con cura. Va detto che lo stesso genio di Alessandria ha avuto delle perplessità ad adottarlo. Infatti, nelle prime **ventotto** proposizioni del I libro degli *Elementi* non lo utilizza, anche se il suo uso avrebbe reso più semplice la trattazione; solo alla ventinovesima lo mette in campo e da quel momento in poi vola col vento in poppa.
Per quanto riguarda la *coerenza* (la consistenza come la definiscono gli anglosassoni), chi presenta un sistema assiomatico è convinto che essa ci sia, anche se in un primo momento non si pone il problema di darne una dimostrazione: questo in genere è un punto di riflessione critica successivo.
Va osservato che, anche se Euclide non le menziona esplicitamente, egli usa **la logica aristotelica delle proposizioni semplici e quella delle proposizioni composte degli stoici**.
Il quinto postulato riveste un’importanza fondamentale perché è caratteristico della geometria euclidea. Per mezzo di esso si dimostra, usando le regole logiche di deduzione, l’importante teorema :
La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a un angolo piatto.
Esso è distintivo della geometria euclidea, infatti è logicamente equivalente al V postulato:
<u>ciò significa che, se lo si assume come postulato, la proprietà espressa dal postulato delle parallele diventa un teorema</u>.
Quindi: *l’esposizione di un postulato invece di un altro è un problema di scelta**, di opinione***.
Per chiarire meglio quest’aspetto è opportuna una parentesi sulla **logica**, che è <u>la disciplina che si occupa della correttezza dei ragionamenti</u>.
Nel linguaggio comune, per esporre i nostri ragionamenti, ci serviamo di frasi, di proposizioni semplici o composte.
La logica, per quanto riguarda l’antichità, fu portata a compimento da **Aristotele** per le proposizioni semplici con i sillogismi e da **Crisippo** per le proposizioni composte mediante le tavole di verità.
Aristotele circoscrive il significato del termine *proposizione* in logica:
<u>una proposizione (o enunciato) è una frase di cui si può affermare ***oggettivamente*** che è **vera** aut **falsa**</u>.
Per questa sua caratteristica una proposizione deve avere i suoi eventuali argomenti, soggetto e complementi *costanti*.

In logica però i nostri ragionamenti sarebbero molto poveri se potessimo usare solo proposizioni; si è allora introdotta la nozione di *predicato*, intendendo con tale termine una frase in cui compaiono anche variabili. A esempio come nella disequazione **x>7** (**x** maggiore di 7): essa può essere vera aut falsa a seconda del valore assegnato a **x**. Oppure **un** poligono è un triangolo: l'enunciato può essere vero aut falso secondo il tipo di poligono.
I logici hanno escogitato due semplici metodi che consentono di trasformare un *predicato* in un *enunciato*:

- Assegnando un particolare valore a **x**.
- Dichiarando quanti sono i valori di x che rendono vero il predicato:

Ogni valore di **x**: $\forall$ **x**.
Esiste almeno un valore di **x:** $\exists$ x.
Non esiste alcun valore di **x**: $\nexists$ **x**.
Riprendiamo il *predicato* x>7.
È vero che **ogni valore** di x è maggiore di 7? La risposta è ovviamente no. Allora se scriviamo $\forall$ **x**, **x**>7 abbiamo una proposizione falsa.
È vero che esiste **almeno un valore** di x rende vero il *predicato*? La risposta è si: $\exists$ **x** tale che **x**>7 è una proposizione vera.
È vero che **nessun valore** di **x** rende vero il *predicato*? La risposta è chiaramente no: $\nexists$ x tale che **x**>7 è un enunciato falso.

La logica dei predicati è abbastanza ricca per esprimere i nostri ragionamenti.
Il più celebre teorema dell'umanità, quello di Pitagora, è formulato in genere così:
In **un** triangolo rettangolo la somma delle aree dei quadrati dei cateti è uguale all'area del quadrato dell'ipotenusa.
Ma *un* è articolo indeterminativo, quindi la formulazione equivale:
In **ogni** triangolo rettangolo la somma delle aree dei quadrati dei cateti è uguale all'area del quadrato dell'ipotenusa.

Fu solo fra il XIX e il XX secolo che la *logica dei predicati* fu organizzata come modello assiomatico-deduttivo a opera di due eminenti logici **Frege** e **Russell** con due **diversi** sistemi di assiomi. Si dimostrò però che i due sistemi erano logicamente equivalenti: era diversa la scelta, **l'opinione** su quali assiomi preferire, ma le proprietà che dimostrava uno si potevano dedurre anche nell'altro.

Premettiamo, in vista del successivo esempio di *opinione diversa*, l'assioma di **Eudosso-Archimede** relativo ai numeri naturali.
Se **a** e **b** sono due numeri naturali, con **a≠o** e **a<b**, esiste almeno un multiplo di **a** che supera **b**, cioè:
$\forall$ **a**, **b** $\mathbf{N_0}$ $\exists$ **n** $\in \mathbf{N_0}$ / **an>b**.

Nella seconda metà dell'Ottocento **Cantor** e **Dedekind** introdussero in modo rigoroso i numeri reali, ma con due concezioni diverse. Il primo identificò un numero reale con una coppia di classi contigue di numeri razionali. Il secondo definì numero reale ogni sezione del campo razionale.
Si è poi dimostrato che se al procedimento introdotto da Cantor aggiungiamo l'assioma di Eudosso-Archimede, il procedimento è interscambiabile con quello di Dedekind: ancora *un'opinione diversa*.

Torniamo per un momento agli *Elementi* di Euclide.
Dopo circa **due millenni** il giureconsulto, filosofo, matematico e logico **Leibniz** notò che neppure la prima proposizione del I libro degli Elementi si poteva dedurre dai postulati, e successivamente il filosofo **Schopenauer** osservò che neanche la quarta proposizione, quello che noi chiamiamo il primo criterio di congruenza dei triangoli, si può ottenere dagli assiomi. Ciò significa che il sistema proposto dal genio di Alessandria non è *completo*, cioè non consente di provare tutte le proposizioni vere in esso contenute. Solo nel 1899 il grande matematico tedesco **Hilbert** rivisitò gli Elementi e

aggiunse sedici postulati e dimostrò che il sistema di **Euclide-Hilbert** è *completo*: ci sono voluti però ***ventuno*** postulati!

Riprendiamo la *teoria dei gruppi* di **Galois.**
Con essa ha inizio *l'algebra moderna*, in cui ci si occupa di "operazioni" e "relazioni" fra gli elementi di un qualsiasi insieme astratto, di cui non si precisa la natura.
Nel 1872 il matematico **Klein** all'università di Erlangen propose un nuovo modo di vedere la geometria che fu accettato da tutti i matematici:
Una geometria è lo studio delle proprietà che rimangono invariate quando si sottopone il piano (lo spazio) a un ***gruppo*** *di trasformazioni*.
Seguendo quest'impostazione, nel secolo scorso i matematici hanno elaborato un nuovo sistema di assiomi *intuitivi*, *semplici* e *forti* (che dànno cioè accesso immediato a proprietà importanti), che presenta solo **sette** postulati invece di **ventuno** e consente di dimostrare tutte le proprietà del sistema di Euclide-Hilbert e anche altre: ancora *un'opinione diversa*.
Purtroppo la nostra scuola non ha ancora recepito il messaggio.

Kant (1724-1804), fra i maggiori filosofi di sempre, sosteneva che le proposizioni – le chiamava giudizi – della geometria euclidea sono *sintetici a priori*, quindi *universali* e *necessari*. Così la geometria di Euclide, essendo necessaria deve essere **unica**. Di conseguenza, secondo la sua visione il V postulato di Euclide che si esprime solitamente con l'unicità della parallela da un punto a una retta non è una proprietà ammessa per vera ma *è vera*.

Però intorno al 1830 due matematici, l'ungherese **Bolyai** e il russo **Lobachevski**, indipendentemente uno dall'altro, proposero un sistema assiomatico in cui ammettevano *un'opinione* diversa da quella di Euclide, cioè che:
per un punto non appartenete a una retta si possano condurre infinite parallele alla retta.
Va detto che il tedesco **Gauss (1777-1855)** - detto il principe dei matematici - aveva formulato, intorno al 1806, le stessa *opinione* di **Bolyai** e **Lobachevski** e ottenuto diverse proprietà, ma non ritenne di pubblicare i suoi lavori per evitare "le risa dei beoti", come scrisse.
Venne poi dimostrato che se era coerente, cioè senza contraddizioni, la geometria di Euclide lo erano quelle proposte **Gauss**, **Bolyai** e **Lobachevski.**
Nel 1854, un altro grande matematico, il tedesco **Riemann**, espresse *un'opinione* diversa dalle due precedenti, e ammise che:
per un punto non appartenete a una retta non si può condurre alcuna parallela alla retta.
Anche questo sistema assiomatico-deduttivo risulta coerente se lo è la geometria euclidea.
In relazione ai sistemi di **Gauss**, **Bolyai**, **Lobachevski** e **Riemann** sono opportune due riflessioni, una interna alla matematica, l'altra esterna a essa, di fisica.
Quella interna conferma l'affermazione del titolo: i postulati non sono scritti *ab eterno* una volta per tutte, sono delle scelte che devono soddisfare solo la coerenza del sistema.
L'altra, importantissima, consiste nel fatto che la teoria della Relatività generale, formulata da **Einstein** nel 1915, stabilisce che lo spazio geometrico ordinario non è di tipo euclideo ma riemanniano, perché i corpi *distorcono* lo spazio attorno a sé e il cammino più breve nelle loro vicinanze è curvo. Di ciò si sono avute ripetute e accurate verifiche sperimentali sino dal 1919.

Un ulteriore significativo esempio tratto dalla fisica.
Alla fine del XIX secolo la fisica classica, sintetizzata nelle consolidate teorie di **Newton** per la meccanica e di **Maxwell** per l'elettromagnetismo, non riusciva a spiegare l'emissione di energia del cosiddetto **corpo nero**. Nel 1900 il fisico tedesco **Plank** avanzò un'ipotesi "eretica" :
l'emissione di energia non avveniva in maniera continua ma discreta, cioè per micro unità, a grani, a pacchetti che **Plank** chiamò *quanti*.
Con quest'ipotesi i risultati delle esperienze erano quelli che la teoria prospettava.

Poiché nel mondo atomico e subatomico la fisica classica non era in grado di fornire teorie che concordassero con gli esperimenti, nel 1926 sono state formulate due teorie della *meccanica quantistica*. Una proposta dall'austriaco **Schrödinger**, l'altra dal tedesco **Heisenberg**. La prima usava i metodi dell'analisi infinitesimale ed è più speculativa, la seconda utilizzava le operazioni e le proprietà delle matrici e si basava su osservabili fisici. Ci furono inizialmente due schieramenti contrapposti a favore dell'una o dell'altra, fino a quando Schrödinger dimostrò che entrambe portavano agli stessi risultati: ancora una volta *un'opinione diversa*.

Agli inizi del XX secolo si sentiva l'esigenza di sistematizzare in modo rigoroso le diverse concezioni della probabilità, la cui introduzione risale alla prima metà del 1600. In questo contesto la scelta degli assiomi da porre a fondamento dell'intera teoria accese un dibattito molto intenso tra le diverse correnti di pensiero che rivendicavano la propria concezione di probabilità come elemento fondante: *diverse opinioni*. Nel 1933 il matematico russo **Kolmogorov** tagliò la testa al toro e mise tutti d'accordo proponendo per la probabilità un gruppo di **soli tre** postulati dai quali si potevano ottenere tutte le proprietà della probabilità: ancora *un'opinione diversa*.

In relazione alla scelta degli assiomi in un sistema assiomatico-deduttivo è significativo esporre le idee propugnate da Hilbert.
Abbiamo visto che gli assiomi euclidei sono proprietà dello spazio che ci circonda, tratte cioè dall'esperienza, che *accettiamo per vere*, ***non*** *che sono vere*. E questa visione è stata corroborata dalle geometrie non euclidee di **Gauss**, **Bolyai, Lobachevski** e **Riemann**. Prendendo le mosse da queste considerazioni Hilbert nel 1900 fece un salto di qualità verso l'astrazione, e ciò ha modellato il pensiero matematico successivo:
Gli assiomi - che devono essere fra loro indipendenti - vanno scelti **solo** tenendo conto della loro coerenza interna, cioè non devono esprimere o comportare contraddizioni.
Ciò non vuole significare eliminare l'intuizione e l'esperienza dallo studio della geometria o di altre discipline scientifiche, ma indirizzarle verso un porto per quanto possibile sicuro.

Affrontiamo per ultimo un argomento più sottile.
Tra il 1874 e il 1884 il grande matematico **Cantor** elabora la *Teoria degli insiemi* per dare una fondazione unitaria alla matematica. In essa introduce formalmente l'infinito in atto.
(Va detto esplicitamente che **Archimede** ne *Il Metodo* e Galilei nei *Discorsi* avevano utilizzato, seppure intuitivamente, l'infinito in atto).
A cominciare dal 1884, **Frege**, il più eminente logico di fine 800, nel monumentale trattato *I fondamenti dell'aritmetica*, ricostruisce la teoria degli insiemi sulla logica, l'aritmetica in maniera insiemistica e la teoria dei numeri reali sull'aritmetica: in definitiva l'intera matematica sulla logica.
Osserva che gli insiemi mostrano in maniera esplicita ciò che i predicati descrivono in modo implicito: ogni predicato definisce un insieme, quello degli elementi per i quali il predicato è vero.
Mentre sta per mandare alle stampe il secondo volume del suo *opus magnum*, riceve una spiacevole lettera, il 16 giugno 1902, da **Russell** che dice:
Caro collega,……..Mi trovo d'accordo con lei su tutto l'essenziale. C'è solo un punto in cui ho incontrato una difficoltà……..
In sostanza Russell, se pure con molto tatto, gli comunica di avere riscontrato un'*antinomia*.
Frege, costernato dalla contraddizione che scuoteva le basi su cui intendeva costruire l'aritmetica, segnala l'osservazione di Russell in un'appendice al secondo volume de *I fondamenti dell'aritmetica*, e non si occuperà più della questione.
Agli inizi del XX secolo **Hilbert**, matematico di grande spessore, gettò uno sguardo profetico sul futuro e propose una serie di ventitre problemi aperti che il nuovo secolo avrebbe dovuto risolvere.
Uno di questi, importantissimo per Hilbert, era che la Matematica potesse dimostrare la sua non contradditorietà.
Nel 1921 il matematico e logico statunitense **Post** dimostrò che:
la logica del primo ordine, cioè la logica delle proposizioni, è:

- **Coerente**, cioè non contiene contraddizioni.
- **Completa**, ossia permette di dimostrare tutte le proposizioni vere del sistema.
- **Decidibile**, ovvero una proposizione del sistema può essere in esso o provata o confutata.

Il sogno di Hilbert cominciava ad avverarsi.
Nel 1929 **Gödel** a ventitré anni, nella sua tesi di laurea, provò che *la logica del secondo ordine, quella dei predicati, è coerente e completa*: il sogno di Hilbert sembrava prendere concretezza.
A questo punto Gödel cerca ovviamente di estendere questo suo risultato alla matematica, cominciando dall'aritmetica. Ma scopre, con sua sorpresa, che c'erano formule vere dell'aritmetica che non sono dimostrabili: l'aritmetica, quindi la matematica, non è completa:
svanì per sempre il sogno….di Hilbert.
Gödel dimostra inoltre che la matematica è indecidibile: **non è «senza macula d'errore e certissima per sé**».
Nel 1970 il russo **Matijasevic** è riuscito a dimostrare che non vi è alcun mezzo per stabilire se se esistano soluzioni intere delle *equazioni diofantee*. (Un'*equazione diofantea* è un'equazione algebrica a coefficienti interi in una o più indeterminate di cui si cercano soluzioni intere. Esempio, il cosiddetto ultimo teorema di **Fermat**: $x^n+y^n=z^n$. Questa non ha soluzioni intere se $n>2$: ciò è stato dimostrato tre secoli e mezzo dopo la morte di Fermat).
E allora? Che cosa pensare di tutta la matematica studiata? È davvero costellata di dubbi?
Dobbiamo lasciarci andare al pessimismo e constatare che il nostro studio è stato inutile? Riflettiamo.
Possiamo avere dubbi sulla grande messe di risultati che la matematica ci ha permesso di ottenere nelle diverse attività umane, in fisica, biologia, scienze sociali, finanza,……? E quello che abbiamo scoperto o applicato è incoerente o non è decidibile?
Ci possiamo chiedere quale sia la matematica «vera»: è la matematica pura, o quella che si può applicare?
Basta tornare un poco indietro nella storia per rendersi conto che è proprio questo continuo rimbalzare da intuizioni motivate da problemi concreti a ripensamenti critici sulle scoperte fatte, a fare avanzare, ogni volta, la matematica. Non è quindi possibile scinderla in due reparti separati: la matematica pura e quella applicata. Se allontaniamo dai nostri interessi la realtà, se, presi dal gioco affascinante ma freddo della logica, ci dedichiamo *solo a uno studio assiomatico*, noi togliamo alla matematica la sua linfa vitale, per ragionare sui nostri ragionamenti, per ripiegarci su noi stessi, insensibili al mondo che ci circonda. No, non è questa la scienza che noi vogliamo.

Abbiamo sin'ora cercato di illustrare il significato dell'affermazione contenuta nel titolo.
Vogliamo ora cercare di capire cosa si deve intendere quando si dice: se la matematica *non* è un'opinione.
Nell'antica Grecia, madre della cultura occidentale, la dottrina platonica della conoscenza del mondo ideale influì fortemente sull'opera di **Euclide** di Alessandria, *Elementi*.

- Quella del genio di Alessandria è una geometria pura, astratta, che egli mette in luce, mentre è assente la geometria metrica, cioè di misura; non si parla a esempio di area – che è la misura delle figure piane - o di volume, che è la misura delle figure solide.
- Euclide non nomina mai né riga né compasso, ma postula soltanto le costruzioni cui il loro uso conduce.

È fuori dubbio che l'esigenza di purezza formale ha influito in modo profondo su tutta la matematica greca e non solo.
Il luogo comune "se la matematica non è un'opinione", la "certezza" matematica, la "verità" matematica traggono origine dal fatto che per più di duemila anni la matematica ha avuto come paradigma l'architettura euclidea degli *Elementi*, in cui le dimostrazioni sono perfette ma non contengono alcun riferimento alla fase euristica della ricerca delle proposizioni enunciate. Tutto ciò è caratteristico della matematica greca antica se si esclude *Il Metodo* di Archimede, in cui intuizione, analogie e anche esperimenti fanno da guida per le postulazioni successive.

In qualsiasi ambito della matematica (e non solo) infatti si trovano *definizioni*. Esse sono, in matematica, *caratterizzazioni* di nuovi “concetti o oggetti matematici” i quali devono essere identificati mettendoli in *precise relazioni* con concetti o oggetti matematici già noti.
Le caratterizzazioni sono così “*certe*”, “*indefettibili*”, non dànno adito ad alcun dubbio.
Quando si costruisce un sistema assiomatico-deduttivo si devono assegnare:
concetti primitivi, **postulati e proprietà logiche, tra cui le regole di deduzione**.
Fatto ciò non è ammessa l’introduzione di concetti non riconducibili a quanto stabilito. L’intuizione, utilizzata nella fase di scelta dei concetti e delle proprietà fondamentali, non deve prospettare nuove situazioni non vincolate alle scelte fatte. Mentre ogni passaggio, ciascuna inferenza deve fondarsi sulle regole di deduzione che sono *metodi attraverso cui da proposizioni vere assunte come premesse si deducono* ***nuove*** *proposizioni* ***necessariamente*** *ancora vere*.
È per questi motivi che si è affermato il modo di dire: *se la matematica non è un’opinione*. È in ciò che consiste la *certezza* matematica.

Giarre 15/09/2015

Alfio Grasso
grassoalfino@yahoo.it