GLI SCACCHI A SCUOLA E LA DIDATTICA DELLA MATEMATICA

In un articolo di un quotidiano nazionale si suggeriva, con diverse motivazioni, l'introduzione a scuola del gioco degli scacchi, sino dalle elementari. Si sosteneva che aiuta gli allievi a trovare strategie risolutive nelle situazioni che il gioco prospetta. Mi sta bene.
Quello che **non** sta bene è che la nostra scuola **non** è strutturata per abituare i giovani a scoprire strategie risolutive, com'è evidente nei libri di testo che sono aridi, formali, non coinvolgenti.
Solo da qualche anno, nella Prova scritta di Matematica degli Esami di Stato dei Licei Scientifici, si è avviata l'introduzione dell'aspetto problematico nei temi presentati. Ma il *problem solving*, cioè la didattica per problemi, deve essere un'attività sistematica, da iniziare subito. Invece, purtroppo, di solito si prendono le mosse da definizioni astratte e perciò poco "problematiche" per i giovani.
È consuetudine premettere alle equazioni molto, troppo calcolo, mentre equazioni (e disequazioni) elementari di primo grado potrebbero essere introdotte partendo da problemi della vita reale. E non si tiene conto del fatto che, laddove lo studio della fisica comincia al primo anno, le equazioni sono utilizzate, senza avere chiarito in modo appropriato l'importanza dell'applicazione dei due principi d'equivalenza (che si possono far capire con l'esempio della bilancia a bracci uguali). Inoltre i grafici sono utilizzati dagli insegnanti di fisica, che ne hanno necessità, senza avere fatto maturare i concetti che ne sono alla base.
In genere si è colpevolmente trascurata - quasi eliminata - la geometria, ricca di situazioni problematiche. Molte di esse si possono presentare a partire da problemi concreti per risolvere i quali l'allievo può essere coinvolto opportunamente nel prospettare strategie risolutive. E ciò sia per quanto riguarda i teoremi da dimostrare, sia per quel che si riferisce all'aspetto applicativo. Inoltre, senza un consistente substrato geometrico gli efficaci mezzi della geometria analitica diventano una serie di formule prive di contenuto.
E ancora, con qualche rara eccezione, non si attua l'interdisciplinarità tanto sbandierata.
Quanto segnalato suggerisce, a mio avviso, di modificare, in modo sostanziale, la nostra impostazione didattica e l'impianto dei libri di testo.
Sarebbe opportuno, qualunque sia l'argomento da introdurre:

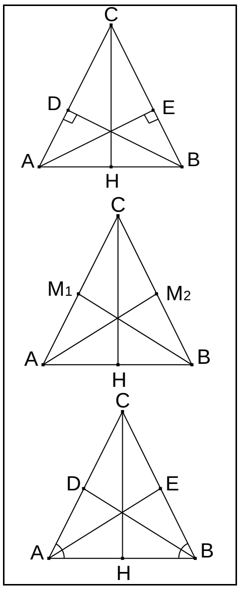
- inserirlo nel contesto storico-culturale che gli è proprio (fonte di suggestioni per i giovani);
- prendere le mosse da un problema concreto o astratto;
- coinvolgere i giovani anche nelle dimostrazioni dei teoremi, proposti spesso come problemi;
- prospettare diversi ambiti di utilizzo, sia applicativi sia teorici.

Per la geometria in particolare l'assiomatica abituale, quella di **Euclide-Hilbert**, è molto pesante – **ventuno proposizioni** – che sarebbe opportuno non infliggere sino dall'inizio. Non si tiene conto del fatto che né gli *Elementi* di Euclide né la loro revisione critica *I fondamenti della geometria* di Hilbert, che colmava le lacune degli *Elementi*, sono stati concepiti come libri di testo scolastici.
Inoltre né l'uno né l'altro suggeriscono strategie di risoluzione: in nessuna parte si fa cenno all'intuizione, alle analogie o a congetture che possano aiutare a trovare un metodo risolutivo, come invece si legge ne *Il Metodo* dell'insuperato **Archimede**, che di queste cose, forse!? s'intendeva.
In aggiunta, come veniva segnalato già nel Congresso **internazionale** di Cagliari del **1982**:

- A quattordici anni non si ha la maturità sufficiente per comprendere bene il concetto di assioma (e di metabolizzarne ventuno).
  Perché non si presentano gli assiomi dei numeri naturali e successivamente quelli di Q ed R di campi ordinati? (Il corsivo è mio).
- La strutturazione delle conoscenze in teorie organiche deve essere l'obiettivo finale di tutta l'attività didattica, ma non ne può costituire in alcun modo il punto di partenza.

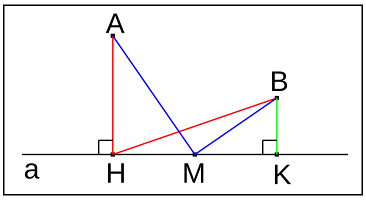
Si potrebbe utilizzare più efficacemente dal punto di vista didattico – all'avvio in maniera sottointesa - l'assiomatica a base metrica, proposta da **Choquet** nel **1959** al Congresso **internazionale** di Royamont, che consiste di soli **sette assiomi** *semplici, intuitivi* e *forti* e suggerita dal professore **Villani**, già presidente dell'UMI (Unione Matematica Italiana). Essa si fonda sull'uso delle isometrie sia come strumento euristico sia dimostrativo. In particolare della simmetria bilaterale, che è presente in natura da seicento milioni di anni ed è evidente negli animali superiori e nelle forme di arte di tutti i luoghi e di ogni tempo. E consente, come esposto nel *Programma di Erlangen* di Klein, di pensare «**una** geometria come studio delle proprietà che rimangono invariate quando si sottopone il piano *a un gruppo di trasformazioni*».

Chiarisco quanto illustrato presentando la comparazione delle dimostrazioni nei sistemi tradizionale e "moderno" di un semplice teorema e quattro proposte didattiche.
In ogni triangolo isoscele le altezze e le mediane relative ai lati congruenti (isometrici) sono congruenti (isometriche); inoltre le bisettrici degli angoli alla base sono congruenti (isometriche).



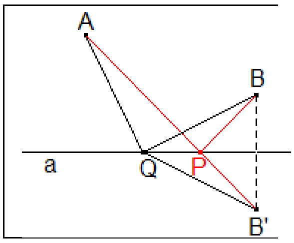
Nello sviluppo tradizionale si devono fare tre dimostrazioni con tre criteri di congruenza (tra cui quello dei triangoli rettangoli poco "frequentato") e che sono complesse perché i triangoli sono "incastrati" uno nell'altro (figure).
Nello sviluppo "moderno", un triangolo si dice isoscele se ha un asse di simmetria, CH per noi: C è unito e A↔B, quindi $\overline{CA}=\overline{CB}$. Con $\mathbf{S_{CH}}$ otteniamo le tre proprietà poiché in un'isometria si conservano *lunghezze* e *ampiezze*.
Altezze: nella simmetria considerata CA e CB sono corrispondenti e il punto E, che è quello di CB a distanza minima da A, si trasforma nel punto di CA a distanza minima da B, cioè D, perché le distanze si conservano: allora $\overline{AE}=\overline{BD}$.
Mediane: In $\mathbf{S_{CH}}$ CA e CB sono associati ed M_1, punto medio di AC, ha per immagine il punto medio di BC, ossia M_2; dunque: $\overline{AM_2}=\overline{BM_1}$.
Bisettrici: In $\mathbf{S_{CH}}$ CA e CB sono corrispondenti e la semiretta AE si tramuta nella semiretta di origine B – immagine di A - e che forma con la semiretta BA un angolo di ampiezza pari a BÂE, ma questa è la semiretta BD; allora nella simmetria E ha per immagine D, quindi $\overline{AE}=\overline{BD}$.

I)
Problema
In una zona pianeggiante c'è un lungo tratto rettilineo di autostrada **a** (figura).



Si deve costruire un casello che serva due cittadine **A** e **B**, dalla stessa parte rispetto ad **a**. In quale punto **P** di **a** si deve costruire il casello affinché la somma dei tragitti $\overline{AP}+\overline{PB}$ sia la più breve, quindi la più economica nella costruzione?
[Le risposte più gettonate dei giovani sono in genere:
- Andare perpendicolarmente da A ad a in H e quindi a B.
- Muoversi da A al punto medio M delle proiezioni di A e B su **a** – rispettivamente H e K - e poi da M a B.

Nessuno dei due percorsi è però motivato razionalmente.]
Qualche suggerimento?.... *OK*, vediamo se la simmetria, come in altri casi, ci può aiutare.
Si, giusto, la simmetria di asse a $\mathbf{s_a}$; vediamo come. *Va bene*, costruiamo il simmetrico B' di B in $\mathbf{s_a}$;



Tracciamo il segmento AB'; esso interseca **a** nel punto **P** perché…*Si*, **A** e **B**' stanno nei semipiani opposti individuati da **a**. Poiché **P** appartiene ad **a** è unito, quindi $\overline{PB'}=\overline{PB}$ e da ciò: $\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{AP}+\overline{PB'}=\overline{AB'}$, dunque (*) $\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{AB'}$.
Prendiamo ora su **a** un punto qualunque punto Q≠C e confrontiamo $\overline{AQ}+\overline{QB}$ con $\overline{AP}+\overline{PB}$: $\overline{AQ}+\overline{QB}=\overline{AQ}+\overline{QB'}$, perché il segmento **QC**' è il simmetrico del segmento **QC**. *Allora*…, giusto, per la proprietà triangolare: (**) $\overline{AB'}<\overline{AQ}+\overline{QB'}$. Da (*) e (**) segue infine che: $\overline{AP}+\overline{PB}<\overline{AQ}+\overline{QB'}$.
È interessante poi legare riflessione della luce e simmetria assiale.

Tradotto in geometria quanto dimostrato è quello che è noto come problema di **Erone** (I secolo d.C.), matematico, ingegnere e inventore di Alessandria d'Egitto:
Dati una retta e due punti generici appartenenti a uno stesso semipiano rispetto a essa, trovare il percorso più breve che li congiunge dovendo toccare la retta.
In questo come in altri problemi sia di dimostrazione sia di applicazione, l'uso delle isometrie, in particolare la simmetria assiale, costituisce un valido strumento per strategie risolutive.

2) Equazioni algebriche di secondo grado.
I babilonesi, grandi astronomi, costruttori di canalizzazioni e commercianti, avevano escogitato un sistema di numerazione sessagesimale agile nei calcoli. Affrontarono e risolsero problemi concreti relativi alle loro diverse attività, molti dei quali comportavano anche equazioni di secondo grado.
Le informazioni che abbiamo si fondano su migliaia di tavolette di terracotta, scritte in caratteri cuneiformi, risalenti circa al 1800-2000 a.C., in cui si trovano le risoluzioni di problemi.
Una di esse contiene il seguente problema che riguarda le aree di terreni:
Dividere l'area di un quadrato di lato 10 in due quadrati più piccoli tali che il lato dell'uno sia ¾ dell'altro.
Lo scriba indica passo per passo la procedura risolutiva da cui si deduce che i babilonesi sapevano risolvere alcune equazioni di secondo grado; non vi è traccia però, in questo come negli altri problemi babilonesi, di un procedimento generale di risoluzione.
Matematizziamo il problema traducendolo in termini algebrici moderni. Per determinare le aree dei quadrati dobbiamo cercarne i lati, di cui uno sia **3/4** dell'altro, quindi…...*Si*, conviene indicare come incognita, sia **z**, la misura del lato del quadrato più grande; quello del quadrato più piccolo è allora $\frac{3}{4}z$; poiché l'incognita rappresenta la misura di un segmento, deve essere….*Bene*, **z>0**.
Esprimiamo mediante l'incognita la richiesta del problema.
Otteniamo $\mathbf{z^2}+(\frac{3}{4}z)^2\mathbf{=100}$, cioè $\mathbf{z^2}+\frac{9}{16}z^2\mathbf{=100}$, ossia, applicando il secondo principio d'equivalenza, $\mathbf{16z^2+9z^2=16\cdot100}$, ovvero (*) $\mathbf{25z^2=1600}$.
Il problema conduce a un'equazione di secondo grado dato che, fatti i calcoli, l'incognita si presenta con esponente massimo **2**.
Facciamo un salto avanti di circa tre millenni e occupiamoci di quello che è considerato il padre dell'algebra, il grande matematico e astronomo arabo **al-Khwarizmi,** attivo nella prima metà del IX secolo d.C. nella Casa della Sapienza a **Bagdad**, la nuova Alessandria d'Egitto, faro della cultura.
Nel suo lavoro più importante, *Kitab Al-Jabr* (vi ricorda qualcosa?), si trova questo problema:
Il quadrato più dieci volte il suo lato dànno come somma trentanove unità; trovare il lato.
Traduciamo in calcolo. Indicata con **x** la misura del lato incognito, poniamoci **innanzitutto** il quesito: quale limitazione dobbiamo assegnare per **x**, visto che rappresenta la misura di un segmento?... *Giusto*, x>0.
Traduciamo ora le informazioni del problema in calcolo. Otteniamo facilmente l'equazione $\mathbf{x^2+10x=39}$, che, applicando il primo principio di equivalenza, possiamo scrivere (1) $\mathbf{x^2+10x-39=0}$: anche in questo caso l'equazione che risolve il problema è di secondo grado.

Veniamo ai nostri giorni e affrontiamo il seguente problema.
L'assessore allo sport del comune di una città, come ogni anno, vuole organizzare un torneo notturno di pallavolo con un girone all'italiana, cioè in cui ogni squadra incontri tutte le altre. Dispone di **30.000** euro, e, dalle esperienze precedenti, le spese per ogni incontro sono state valutate in **1.000** euro per ciascun incontro fra cena, trasporto, ecc.: quante squadre può invitare?
La scelta dell'incognita da determinare, sia **x**, è, dalla domanda finale, il numero delle squadre da invitare: esso deve innanzitutto essere un numero naturale.
Per mettere in relazione l'incognita con le informazioni di cui disponiamo dobbiamo sapere quanti incontri si devono svolgere. Cosa suggerite?.....*Benissimo*, dato che **x** è il numero di squadre e

ciascuna squadra deve incontrare tutte le altre, il numero di incontri è $\mathbf{x(x-1)}$. La spesa per tutti questi incontri si ottiene….*Giusto*, moltiplicando la spesa per ciascun incontro in euro – **1.000** – per $\mathbf{x(x-1)}$: essa è dunque $\mathbf{1.000x(x-1)}$. Quindi tale spesa va uguagliata alla cifra di cui dispone, **30.000** euro: $\mathbf{1.000x(x-1)=30.000}$.
Come suggerite di procedere?.........*OK*, per prima cosa applichiamo il secondo principio d'equivalenza e dividiamo ambo i membri per il fattore comune **1.000**; otteniamo $\mathbf{x(x-1)=30}$ che svolgendo i calcoli diventa $\mathbf{x^2-x=30}$ che, applicando il primo principio d'equivalenza possiamo scrivere (1) $\mathbf{x^2-x-30=0}$. Questa è un'equazione di secondo grado perché, eseguiti i calcoli, l'incognita si presenta con grado massimo **2**.

I problemi esaminati distano millenni fra loro e si riferiscono a civiltà differenti e a situazioni di natura diversa; per poterli affrontare dobbiamo però sapere risolvere equazioni di secondo grado, le quali si presentano in molti altri contesti concreti oltre a quelli segnalati. Ma noi sappiamo svolgere quelle di primo: attrezziamoci.
Introduciamo innanzitutto un poco di terminologia.
Un'equazione di secondo grado nell'incognita **x**, svolti i calcoli e applicato il primo principio d'equivalenza, ha, nella sua forma più generale, la stessa struttura della (1): (*) $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$, dove **a**, **b** e **c** sono numeri reali, con $\mathbf{a\neq0}$. Essa viene detta forma **normale**, **canonica** o **ridotta** dell'equazione. Se nella (*) $\mathbf{b\neq0}$ e $\mathbf{c\neq0}$, l'equazione si dice **completa**. Alla sua risoluzione giungeremo per gradi, muovendoci dal semplice al complesso come suggeriva **Cartesio**.
<u>Un caso particolare</u>: se nella (*) $\mathbf{b=0}$ e $\mathbf{c=0}$, essa diventa $\mathbf{ax^2=0}$: trovatene le soluzioni…..*Bene*, essendo $\mathbf{a\neq0}$, dalla proprietà di annullamento del prodotto, $\mathbf{x^2=0}$, cioè $\mathbf{x=0}$. Allora la nostra equazione ha una sola soluzione in $\mathbf{x=0}$ o, come si dice anche, due soluzioni coincidenti con $\mathbf{x=0}$.
Un'equazione della forma $\mathbf{ax^2=0}$, si chiama <u>monomia</u> dato che il primo membro è un monomio.
Riprendiamo il nostro percorso.
Consideriamo un altro problema che si trova nel *Kitab Al-Jabr*:
<u>Dividere 10 in due parti tali che il quadrato della prima sia uguale a quattro volte il prodotto delle due parti</u>.
Al-Khwarizmi espone passo per passo il procedimento risolutivo. Cerchiamo di trovarlo anche noi.
Traduciamo il problema in algebra tenendo conto che l'incognita è il primo fattore……
Si, se indichiamo con **x** la prima parte – $\mathbf{x>0}$ - la seconda è $\mathbf{10-x}$; otteniamo così l'equazione $\mathbf{x^2=4x(10-x)}$. Svolgiamo i calcoli: $\mathbf{x^2=40x-4x^2}$; applicando il primo principio d'equivalenza abbiamo $\mathbf{x^2-40x+4x^2=0}$, cioè (2) $\mathbf{5x^2-40x=0}$: essa è un caso particolare della (*), quello in cui $\mathbf{c=0}$.
Cercate di risolverla utilizzando le conoscenze che avete….
Va bene. Raccogliendo a fattore comune **5x** il primo membro diventa $\mathbf{5x(x-8)=0}$ che, per la proprietà di annullamento del prodotto, dà $\mathbf{x=0}$ o $\mathbf{x-8=0}$, cioè $\mathbf{x=8}$; come il matematico arabo scartiamo la soluzione nulla perché non è compatibile con il vincolo imposto all'incognita, $x>0$, per cui l'unica soluzione è $\mathbf{x=8}$.
Generalizziamo il procedimento usato per risolvere un'equazione che ha la stessa struttura della (2), cioè nel caso in cui i coefficienti di $\mathbf{x^2}$ e **x** sono rispettivamente **a** e **b**, due numeri reali generici, cioè diversi da zero: **(2)** $\mathbf{ax^2+bx=0}$. Qualche suggerimento?.....
Va bene, possiamo di nuovo utilizzare il procedimento precedente:
da $\mathbf{ax^2+bx=0}$ segue $\mathbf{x(ax+b)=0}$, quindi $\mathbf{x=0}$ o $\mathbf{ax+b=0}$, cioè $\mathbf{ax=-b}$ e infine $\mathbf{x=-b/a}$.
L'equazione $\mathbf{ax^2+bx=0}$ si ottiene da quella normale se $\mathbf{c=0}$, si suole chiamare **spuria**.
N.B. <u>Un'equazione spuria ammette, qualunque siano **a** e **b** $\mathbf{\neq0}$, la soluzione $\mathbf{x=0}$</u>.
[**Immediate** applicazioni di risoluzione di equazioni spurie e di problemi che a essa si riconducono, alcuni dei quali si riferiscono a situazioni tratte dalla vita reale.]

Riprendiamo il problema babilonese che ci aveva condotto all'equazione $\mathbf{25z^2=1600}$.
Come proseguireste?....

Giusto! Come se si trattasse di un'equazione di primo grado; dividendo ambo i membri per il coefficiente dell'incognita, cioè per 25, otteniamo $\mathbf{z^2=1600/25}$, da cui $\mathbf{z^2=64}$. Si devono trovare due numeri il cui quadrato è **64**…. *Si*, le radici quadrate di **64,** che sono **-8** e **8**; tenendo però conto del fatto che **z** è la misura di un segmento, il valore di **x** che risolve il problema è solo: **x=8**.
L'equazione precedente si può scrivere $\mathbf{25z^2-1600=0}$: questa si ottiene dall'equazione normale se **b=0**: $\mathbf{az^2+c=0}$; essa viene detta equazione **pura**.
Essa si può scrivere come $\mathbf{az^2=-c}$, cioè $\mathbf{z^2=-c/a}$ (ricordiamo che $\mathbf{a\neq 0}$) e:

- se **a** e **c** hanno segno opposto **–c/a>0**, quindi ha due soluzioni opposte **z=±** $\sqrt{-c/a}$, come abbiamo visto nell'esempio precedente.
- se **a** e **c** hanno segno uguale **–c/a<0**, abbiamo $\mathbf{z^2=-c/a}$, dunque l'equazione non ha radici reali perché un quadrato, qualunque ne sia la base, è un numero *non negativo*.

[**Immediate** applicazioni di risoluzione di equazioni spurie e di problemi che a essa si riconducono, alcuni dei quali si riferiscono a situazioni tratte dalla vita reale.]

Per affrontare la risoluzione dell'equazione completa di secondo grado riprendiamo il problema del *Kitab Al-Jabr* considerato all'inizio.
Il quadrato e dieci volte il suo lato dànno come somma trentanove unità; trovare il lato.
Come abbiamo visto il problema porta a (1) $\mathbf{x^2+10x-39=0}$.
È interessante seguire la risoluzione di **Al-Khwarizmi [**significativa dal punto di vista didattico] perché ci consentirà di ottenere con naturalezza il procedimento risolutivo generale.
Il matematico arabo prospetta un'interessante strategia nella risoluzione dell'equazione:
<u>Se non sai risolvere un problema cerca di collegarlo con uno più semplice che hai già risolto</u>.
Questo è uno dei suggerimenti che darà **Cartesio** nel Seicento per risolvere i problemi.
Al-Khwarizmi riconduce questo caso a quello di un'equazione di secondo grado del tipo (#) $\mathbf{z^2=h}$, che, per quanto visto, ha due soluzioni reali opposte se **h>0**, mentre non ha soluzioni reali se **h<0**.
Vediamo se riusciamo nello stesso intento.
Riprendiamo la (1) $\mathbf{x^2+10x-39=0}$ e cerchiamo scriverla con una forma analoga alla(#) $\mathbf{z^2=h}$. Per ciò, per primo cosa suggerite di fare?.....*OK*, applichiamo il primo principio di equivalenza e trascriviamo -39 a secondo membro cambiandolo di segno: $\mathbf{x^2+10x=39}$. Ora dobbiamo costruire a primo membro un quadrato di binomio $\mathbf{a^2+2ab+b^2}$; come pensate di procedere dato che abbiamo $\mathbf{x^2}$ il quadrato del primo monomio?.....*Molto bene*, **10x**=**2·5·x=2·x·5**: in questo prodotto 2 dà il *doppio* del prodotto di **x** che è la base del primo quadrato, per 5 che è così la base del secondo quadrato.
Per avere il quadrato di binomio dobbiamo allora aggiungere a $\mathbf{x^2+2\cdot5\cdot x}$ il quadrato di **5**, **25**. In questo modo però abbiamo alterato il primo membro $\mathbf{x^2+2\cdot5\cdot x}$; allora, per non modificare l'equazione…. *Sissignorina*, addizioniamo e sottraiamo ad ambo i membri **25**, abbiamo: $\mathbf{x^2+2\cdot5\cdot x+25=39+25}$, che possiamo scrivere $\mathbf{(x+5)^2=39+25}$, cioè $\mathbf{(x+5)^2=64}$. Così l'equazione è sotto la forma $\mathbf{z^2=h}$, con **h>0**, che sappiamo risolvere: **x+5=** $\pm\sqrt{64}$; da questa otteniamo **x+5=-8,** cioè **x=-13**, o **x+5=8**, da cui **x=3**. Poiché **x** è la misura di un segmento, l'unica soluzione è **x=3**.

Un ulteriore esempio di risoluzione di un'equazione completa.
<u>Il problema contenuto nella *Tavoletta BM 13901:1**, trovata vicino a Babilonia e che risale al 1800 a.C. circa, chiede di determinare un numero tale che, sommandolo al suo quadrato, si ottenga 3/4</u> .
Trasferiamolo nel linguaggio dell'algebra…….
Si, indicato con **x** il numero cercato **–x>0** - il problema si traduce nell'equazione $\mathbf{x+x^2=3/4}$; ordinandola diviene $\mathbf{z^2+z=3/4}$: questa è un'equazione completa di secondo grado.
Come prima cerchiamo di costruire un quadrato a primo membro. In questo caso però non c'è il 2 del doppio prodotto, allora, per non alterare $\mathbf{x^2+x}$…..*Bene*, moltiplichiamo per 2 e per 1/2: $\mathbf{x^2+2\cdot x\cdot}\frac{1}{2}$ $\mathbf{=}\frac{3}{4}$. Ora, come prima, per avere un quadrato di binomio e non alterare l'equazione…..*OK*,

addizioniamo e sottraiamo ad ambo i membri $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$; otteniamo $\mathbf{x^2+2\cdot x\cdot}\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$, da cui $\mathbf{(x+}\frac{1}{2}\mathbf{)^2=1}$. Da questa ricaviamo $\mathbf{x+}\frac{1}{2}\mathbf{=\pm 1}$, dalla quale segue $\mathbf{x+}\frac{1}{2}\mathbf{=1}$, cioè $\mathbf{x=1-}\frac{1}{2}$**,** ossia $\mathbf{x=}\frac{1}{2}$**,** oppure $\mathbf{x+}\frac{1}{2}\mathbf{=-1}$, ovvero $\mathbf{x=-1-}\frac{1}{2}$, da cui $\mathbf{x=-}\frac{3}{2}$, L'unica soluzione del problema è $\mathbf{x=}\frac{1}{2}$**,** perché **x** è la misura di un segmento.

A questo punto, utilizzando l'esempio precedente, possiamo ottenere la formula risolutiva generale dell'equazione algebrica di secondo grado ridotta a forma normale $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$ con $\mathbf{a\neq 0}$.

Per avere il quadrato di **x,** $\mathbf{x^2}$,….*Si*, dividiamo ambo i membri per $\mathbf{a\neq 0}$. **O**tteniamo $\mathbf{x^2+}\frac{b}{a}\mathbf{x+}\frac{c}{a}\mathbf{=0}$, o anche $\mathbf{x^2+}\frac{b}{a}\mathbf{x=-}\frac{c}{a}$, come nell'esempio di prima. Proseguiamo.

Come sopra introduciamo il fattore **2** del doppio prodotto nel coefficiente di **x** e, per non alterarlo dividiamo $\frac{b}{a}$ per **2**, abbiamo $\mathbf{x^2+2}\frac{b}{2a}\mathbf{x=-}\frac{c}{a}$**.** Poiché **x** è la base del primo quadrato quella del secondo è $\frac{b}{2a}$; dobbiamo allora addizionare e sottrarre ad ambo i membri $\mathbf{(}\frac{b}{2a}\mathbf{)^2}$, cioè $\frac{b^2}{4a^2}$.

Otteniamo così $\mathbf{x^2+2}\frac{b}{2a}\mathbf{x+}\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}\ \mathbf{-}\frac{c}{a}$ o anche $\mathbf{(x+}\frac{b}{2a}\mathbf{)^2=}\frac{b^2}{4a^2}\ \mathbf{-}\frac{c}{a}$. Questa, fatti i calcoli a secondo membro, diventa: (*) $\mathbf{(x+}\frac{b}{2a}\mathbf{)^2=}\frac{b^2-4ac}{4a^2}$**.**

Come nel caso delle equazioni pure possono presentarsi due casi:

- <u>se $\mathbf{b^2-4ac\geq 0}$ l'equazione ha due soluzioni reali</u>;
- se $\mathbf{b^2-4ac<0}$ <u>l'equazione **non** ha soluzioni reali</u>.

Precisiamo il primo caso $\mathbf{b^2-4ac\geq 0}$:

1. Se nella (*) $\mathbf{b^2-4ac=0}$, abbiamo $\mathbf{(x+}\frac{b}{2a}\mathbf{)^2=0}$, quindi $\mathbf{x+}\frac{b}{2a}\mathbf{=0}$ e infine $\mathbf{x=-}\frac{b}{2a}$.

   L'equazione ha una sola soluzione reale o come si dice anche due soluzioni reali e coincidenti.

2. Se nella (*) $\mathbf{b^2-4ac>0}$, otteniamo $\mathbf{x+}\frac{b}{2a}\mathbf{=\pm}\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$, cioè $\mathbf{x=-}\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ da cui

$$(**)\ x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Dalla formula precedente troviamo le due soluzioni reali e distinte, che indichiamo con $\mathbf{x_1}$ **e** $\mathbf{x_2}$:

$$\mathbf{x_1}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\ \mathbf{x_2}=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Poiché il risultato è stato ottenuto utilizzando coefficienti qualunque, per risolvere un'equazione completa è sufficiente applicare la (**).

[**Immediate** applicazioni di risoluzione di equazioni spurie e di problemi che a essa conducono, alcuni dei quali si riferiscano a situazioni tratte dalla vita reale.]

N.B.

<u>I tre tipi di equazioni spuria, pura e completa vanno introdotte uno alla volta nel progetto didattico</u>. Va inoltre segnalato ai giovani che, in presenza di un'equazione spuria o pura è assurdo usare la formula risolutiva: sarebbe come se per smuovere un fuscello usassimo una ruspa.]

3)
In uno dei libri di testo che va per la maggiore, per quel che si riferisce all'introduzione dei **numeri complessi**, si legge:
Si dice numero complesso una coppia ordinata di numeri reali.
Tutti gli studenti stapperanno certamente bottiglie di champagne!
Un possibile percorso potrebbe essere il seguente, in cui si tiene conto del fatto che, come vedremo tra breve, nuovi "oggetti numerici", che verranno poi chiamati **numeri complessi**, si presentano da sé, *irrompendo* nella matematica nella risoluzione delle equazioni algebriche di terzo grado.
È bene prendere l'avvio illustrando l'importanza degli algebristi italiani del Cinquecento, **Del Ferro**, **Fontana** - noto come **Tartaglia - Cardano**, **Ferrari**, **Bombelli**, che a vario titolo, hanno avuto il merito di contribuire alle risoluzioni per mezzo dei radicali delle equazioni algebriche generali di terzo e quarto grado e alle loro applicazioni.
Cardano, nell'*Ars Magna* (La grande arte), vuole risolvere il seguente problema:
dato un segmento lungo 10 metri dividerlo in due parti tali che l'area del rettangolo da esse determinato sia 40 m^2.
Il problema conduce all'equazione $\mathbf{x^2-10x+40=0}$, risolta la quale ottiene:

$$\mathbf{x=5\pm}\sqrt{-15}\,.$$

Ma $\sqrt{-15}$ è un "oggetto numerico" che non ha senso all'interno delle conoscenze acquisite (che erano quelli che noi chiamiamo i numeri reali, anche se una loro esposizione rigorosa avverrà solo nella seconda metà dell'Ottocento a opera di **Cantor** e **Dedekind**, in modo indipendente).
Cardano nota però una stranezza; se considera $\sqrt{-15}$ come un *numero*:
la somma delle soluzioni è $\mathbf{x_1+x_2=5-}\sqrt{-15}\,\mathbf{+5+}\sqrt{-15}=\mathbf{10}$ e il loro prodotto $\mathbf{x_1*x_2=(5-}\sqrt{-15}\,\mathbf{)*(5+}\sqrt{-15}\,\mathbf{)=5^2-(}\sqrt{-15}\,\mathbf{)^2=25-(-15)=40}$, cioè questi *strani numeri* risolvono il problema.
Scatta così una molla che gli fa intravedere la possibilità di introdurre nuovi "oggetti numerici".
Il matematico che riconobbe per primo la necessità di ampliare l'insieme dei numeri allora conosciuti fu Bombelli (1526-1573). Nella sua opera *L'Algebra*, raccoglie e completa i risultati ottenuti in campo algebrico precedentemente da diversi matematici; si propone così di completare i vari casi di risoluzione delle equazioni di terzo grado, anche nel cosiddetto caso *irriducibile*, cioè quando nella formula risolutiva si presenta la radice quadrata di un numero negativo.
Del Ferro e Tartaglia avevano determinato la formula risolutiva dell'equazione algebrica generale di terzo grado $\mathbf{ax^3+bx^2+cx+d=0}$ riducendola con opportune trasformazioni a equazioni di tre tipi: $\mathbf{x^3+px=q}$, $\mathbf{x^3=px+q}$ e $\mathbf{x^3+q=px}$, con **p** e **q** positivi.
Ecco uno degli esempi di Bombelli, l'equazione $\mathbf{x^3=15x+4}$.
Nota che $\mathbf{x=4}$ è soluzione dell'equazione (le altre due sono: $x=2\pm\sqrt{3}$), ma, applicando la formula di Tartaglia a essa relativa, ottiene:

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\,.$$

Questa, applicata al nostro caso, dà:

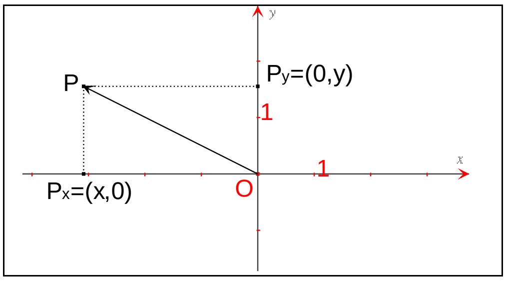
$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}\,.$$

Bombelli pensa di estendere ai nuovi oggetti numerici le proprietà note dei radicali e scrive quindi la soluzione precedente come $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-1}*\sqrt{121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-1}*\sqrt{121}}$.
Se in essa poniamo $\mathbf{i}=\sqrt{-1}$, come suggerirà in seguito **Eulero**, quindi $\mathbf{i^2=-1}$, ricaviamo:

$$x=\sqrt[3]{2+i*\sqrt{121}}+\sqrt[3]{2-i*\sqrt{121}}=\sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2-11i}\,.$$

A questo punto Bombelli prova che, applicando le consuete proprietà delle operazioni ai nuovi oggetti numerici, ottiene $\mathbf{2+11i=(2+i)^3}$ e $\mathbf{2-11i=(2-i)^3}$; quindi la soluzione si può scrivere:

x=$\sqrt[3]{(2+i)^3}+\sqrt[3]{(2-i)^3}$, da cui **x**= 2+i +2-i =, cioè **x=4**, che è la soluzione prima trovata.
Questo risultato corrobora le sue idee.
Bombelli espone le formule della somma e del prodotto di quelli che considera, dai risultati ottenuti, nuovi numeri, che chiama "numeri silvestri". Egli, nell'introduzione di questi nuovi numeri, cerca di conservare le proprietà formali delle operazioni e delle relazioni già note tra numeri che sono alla base del calcolo.
Questi nuovi "oggetti numerici" verranno chiamati **numeri complessi** e si possono scrivere, come visto, sotto la forma **x+yi**, dove $\mathbf{i}=\sqrt{-1}$ si chiama unità immaginaria**,** **x** si definisce parte reale e **y** parte immaginaria. Lo zero complesso, che indichiamo sempre con **0=0+0i**, è quello che ha uguale a zero sia la parte reale che la parte immaginaria.
Osserviamo innanzitutto che, come le frazioni sono individuate da coppie ordinate di numeri interi (**a,b**), con **b≠0**, che noi scriviamo solitamente come **a/b**, così questi nuovi "oggetti numerici" sono caratterizzati da una coppia ordinata (**x,y**) di numeri reali.
Ciò suggerisce un'interessante rappresentazione geometrica di questi nuovi "numeri".
Sappiamo che ogni numero reale si può rappresentare biunivocamente come un punto su una retta munita di un sistema di coordinate ascisse. La scrittura precedente vi suggerisce qualche interpretazione grafica di un numero complesso **x+yi**?....
Bene! **Gauss** (1777-1855), detto il principe dei matematici, propose proprio di associare a ogni numero complesso **x+yi** il punto di un piano cartesiano che avesse **x**, la parte reale, come ascissa e come ordinata **y** la parte immaginaria. Così è possibile fare corrispondere in modo biunivoco a ogni numero complesso un solo punto del piano.
Inoltre, poiché assegnato un qualunque punto **P** del piano a esso possiamo associare biunivocamente il vettore di origine **O** e di secondo estremo il punto **P=(x,y)**, viene a stabilirsi una corrispondenza biunivoca tra questi "numeri" e i vettori di origine **O**. Da quanto precede (figura a fianco) il modulo del vettore $\overrightarrow{OP}$ è $\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$: tale numero reale è detto modulo del numero complesso **x+yi**.

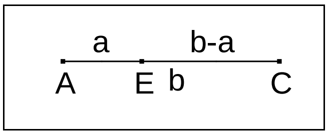


Questa corrispondenza biunivoca, come vedremo in seguito, stabilirà un espressivo legame fra numeri complessi, trigonometria e rotazioni del piano.
Si possono adesso introdurre la relazione di uguaglianza e le operazioni fra numeri complessi utilizzando anche la loro rappresentazione mediante vettori uscenti dall'origine.
Se la parte immaginaria ***y*** *è uguale a* ***0****, le proprietà formali dei numeri complessi* **C** *dànno gli stessi risultati dei numeri reali* **R**. **C** è allora un ampliamento di **R**.
Perché non crediate che i numeri complessi siano solo un gioco matematico, è bene chiarire che essi hanno trovato e trovano importanti applicazioni, oltre che in matematica come studierete, in:
Dinamica dei fluidi, elettronica, informatica, telecomunicazioni, teorie dei segnali e fisica quantistica, un ramo della fisica quest'ultima sorto agli inizi del Novecento e cha rivoluzionato il nostro modo di concepire il mondo delle particelle atomiche e subatomiche.

4) Teoremi di Fermat e Lagrange
Il primo presenta un altro significativo esempio dei motivi che stimolarono l'introduzione del calcolo differenziale: la risoluzione di problemi di massimo e di minimo, come attesta anche il lavoro di **Keplero** *Nova stereometria doliorum vinariorum* pubblicata nel 1613.
Pierre de Fermat (1601-1665) era *magistrato* a Tolosa, sua città natale. Diceva di essere un *matematico per diletto*. Schivo nel pubblicare i suoi risultati, fu assieme a **René Descartes** (1596-1550) il più grande matematico della prima metà del XVII secolo.
Nel breve testo dal titolo *Methodus ad disquirendam maximum et minimum* **Fermat** espone il suo metodo per trovare massimi e minimi relativi delle funzioni polinomiali. In tale criterio, come vedremo tra breve, utilizza uno procedimento che in sostanza prelude alla derivata di una funzione.

Egli non precisa che la funzione deve essere continua perché, come per **Leibniz** e **Newton** successivamente, la “continuità” di una funzione era una proprietà……ovvia. Questi poi non avevano formalizzato il concetto di limite e non possedevano la più pallida idea di cosa fosse un numero reale. Gli strumenti di calcolo che avevano ideati, indipendentemente, erano straordinariamente efficaci per risolvere molti problemi, sia in matematica che in fisica, quindi dovevano essere….corretti. Per nostra fortuna l’aspetto euristico ebbe la meglio sul rigore, altrimenti non avremmo avuto lo straordinario sviluppo scientifico del XVII e XVIII secolo.
Limiti e continuità cominciano ad avere un assetto rigoroso dopo oltre un secolo con **D’Alambert** e soprattutto n **Cauchy** e **Weierstrass** che nell’800, a presentare le definizioni e i procedimenti rigorosi che usiamo ancora oggi. Nello stesso periodo, a opera di **Cantor** e **Dedekind**, furono introdotte due definizioni di numero reale e la continuità della retta.

La “derivata” prima delle derivate.
Torniamo a Fermat.
Aveva notato che nei punti “vicini” ai massimi e ai minimi, a piccole variazioni della variabile indipendente corrispondevano piccole variazioni della funzione. Ciò lo spinge a congetturare che i valori della funzione relativi a tali punti dovessero essere “quasi uguali” a quello del massimo o del minimo. Per esporre con chiarezza il suo procedimento presenta innanzitutto un semplice problema che già si trova risolto geometricamente negli *Elementi* di **Euclide**:
«<u>Dividere un segmento **AC** mediante un punto **E** di modo che il rettangolo di lati **AE** ed **EC** sia massimo</u>».
Riportiamo le sue argomentazioni perché molto istruttive.
«Posto **AC=b**, sia **a** una delle due parti **AC** o **EC**, l’altra sarà allora **b-a**; si tratta di massimizzare (*) **a(b-a)=ab-a²**. Sia ora **a+ε** (la chiama e), con **ε** “**molto piccolo**” - ma diverso da 0 - la prima parte di **b**; la seconda sarà allora **b-(a+ε)** ovvero **b-a-ε**, il corrispondente prodotto sarà (*) **(a+ε)(b-a-ε)=ab-a²-aε+bε-aε-ε ²**. Ciò fatto, “<u>*adaequabitur*</u>” i secondi membri delle (*) e (**)» (il termine *adaequabitur* significa, presso a poco, consideriamo che siano *quasi* uguali, e Fermat lo denota con ~): **ab-a²~ab-a²-aε+bε aε-ε²**. Applicando a questa le proprietà delle uguaglianze ottiene **bε~2aε+ε²**, da cui, dividendo ambo i membri per **ε** otteniamo **b~2a+ε**: infine “*elidantur*”, cioè sopprimendo **ε**, **b=2a**, ossia **a=b/2**.



Fermat conclude asserendo: «Il metodo non sbaglia mai»… «È impossibile dare un metodo più generale di questo». Applica poi tale metodo per trovare la tangente a una curva in un suo punto.
Osserviamo che Fermat, in effetti, procede in modo analogo a come facciamo noi per la derivata in un punto. Infatti, quando scrive «sia ora **a+ε** la prima parte di **b**», non fa altro che incrementare **a** di **ε**, con **ε** “molto piccolo”, cioè, come diciamo noi, al limite infinitesimo.
Il valore della funzione area inizialmente è **f(a)=ab-a²**, mentre quello relativo all’incremento **a+ε** dà **f(a+ε)=ab-a²-aε+bε-aε-ε ²**; quando “adeguaglia” questi valori si pone: **f(a+ε)~f(a)**, cioè (&) **f(a+ε)-f(a)~0**, ossia **ab-a²-aε+bε-aε-ε²-(ab-a²)~0**; in questa, svolgendo i calcoli si ha che: (§) **f(a+ε)-f(a)=-2aε+bε-ε²~0**.
A leggere con attenzione, il tolosano impone che le due aree differiscano per meno di una quantità “piccolissima”, per noi <u>il limite della loro differenza è zero</u>.

A questo punto Fermat divide ambo i membri per **ε**, così: $\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}=\frac{-2a\varepsilon+\varepsilon-\varepsilon^2}{\varepsilon}$**~0**,

cioè $\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}=\frac{\cancel{\varepsilon}(-2a+b-\varepsilon)}{\cancel{\varepsilon}}$**~0**; allora (#) $\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}=-2a+b-\varepsilon$ **~0**.

Prosegue dicendo “*elidantur*”, cioè sopprimendo **ε»**, **-2a+b=0**, da cui **-2a=- b=**, ossia **a=b/2**:
il rettangolo di area massima è quindi il quadrato il cui lato misura **b/2**.
È importante osservare che la (#) è il rapporto incrementale della funzione area quando si passa da **a** ad **a+ε**; noi scriviamo che:

$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}$ =0, cioè $\lim_{\varepsilon\to 0}$ **(-2a+b-ε)=0**, da cui $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}$ = **-2a+b=0**; da questa **a=b/2**.
Il procedimento si può considerare, nella sostanza, un approccio istintivo al concetto di derivata.

Teorema di Fermat

<u>Se una funzione f(x) ha in un punto x_0 interno al suo insieme di definizione un minimo o un massimo relativo e se f(x) è derivabile in x_0, allora $f'(x_0)=0$.</u>

Per fissare le idee supponiamo che **f(x)** abbia in $\mathbf{x_0}$ un minimo relativo. Allora esiste un intorno $\mathbf{I(x_0)}$ di semidimensione |**h**|, con **h≠0**, tale che $\forall x \in \mathbf{I(x_0)}$ si ha: $\mathbf{f(x_0+h)\geq f(x_0)}$, cioè (*) $\mathbf{f(x_0+h)-f(x_0)\geq 0}$.

Per dimostrare che $\mathbf{f'(x_0)=0}$ costruiamo il rapporto incrementale relativo a x_0: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Questo, per la (*), se **h<0** risulta **≤0**, mentre per **h>0** è **≥0**. Allora, in forza del teorema della permanenza del segno, il suo limite sinistro per **h→0** è **≤0** e il limite destro riesce **≥0**; poiché **f(x)** è derivabile in $\mathbf{x_0}$ i due limiti devono coincidere, quindi $\mathbf{f'(x_0)=0}$.

Poiché la derivata prima di una funzione in un punto $\mathbf{x_0}$ interno al suo insieme di definizione rappresenta geometricamente il coefficiente angolare della tangente al suo grafico in $\mathbf{P_0}=(\mathbf{x_0},\mathbf{f(x_0)})$, le ipotesi del teorema di Fermat assicurano che esiste almeno un tale punto in cui la tangente è parallela all'asse $\vec{x}$.

Nel teorema di Rolle **f(x)** è **continua in un intervallo chiuso e limitato [a,b]** e **derivabile in]a,b[**, con **f(a)=f(b)**; per **Weierstrass f(x)** è dotata in **[a,b]** di minimo e massimo. Il risultato di Fermat assicura che la tangente in tali punti è parallela alla retta **r** che passa per i punti **A=(a,f(a))**, **B=(b,f(b)=f(a))**.

Veniamo al teorema di **Lagrange**.

È legittimo chiedersi: se nell'intervallo chiuso e limitato **[a,b]** di prima ed **f(b)≠f(a)**, esiste ancora almeno una tangente **t** al grafico di **f(x)** parallela alla retta **s** che passa per i punti **A=(a,f(a))**, **B=(b,f(b))**? L'intuizione suggerisce di si, dato che per la continuità **f(x)** ha un valore finito in ogni punto di [a,b] e per la derivabilità esiste la tangente in ogni punto di]**a,b**[: proviamo che la nostra congettura è corretta.

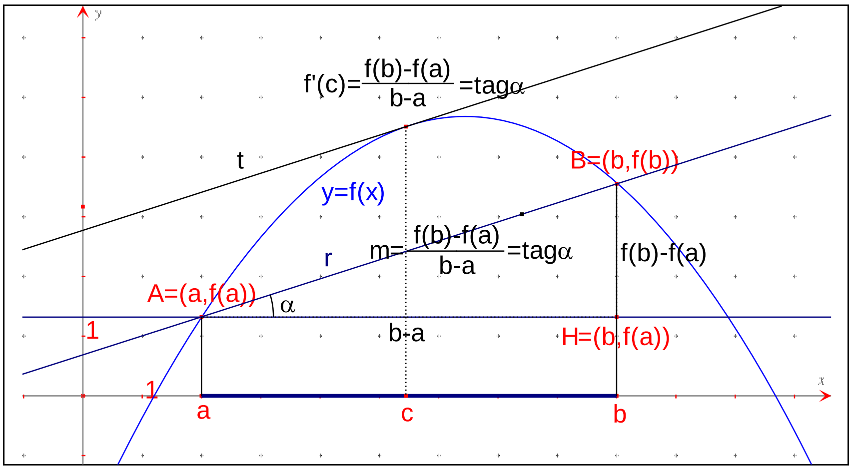
Teorema di Lagrange

Se **f(x)** è una funzione **continua in un intervallo chiuso e limitato [a,b]** e **derivabile in]a,b[**, allora esiste almeno un punto $\mathbf{x_0}$ in **]a,b[** per cui: $\mathbf{f'(x_0)}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$**.**

Nei libri di testo si comincia in genere in uno dei seguenti modi.

- Consideriamo la funzione g(x)= f(x)+kx, con k costante……..
- Consideriamo questa nuova funzione: g(x)= f(x)(b-a)- x(f(b)-f(a))……..

La domanda nasce spontanea: perché? L'ha suggerito l'Arcangelo Gabriele?
La conclusione geometrica precedente suggerisce una possibile strategia.



Indichiamo con **H=[b,f(a)]** il punto comune alle rette **y=f(a)** e **x=b**.
Detta **α** la misura dell'angolo **HÂB**, dal triangolo **AĤB**, rettangolo in **H**, abbiamo che il coefficiente angolare della retta **r≡AB** è **m**=tan**α** $=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Da questa **f(b)-f(a)=m(b-a)**, cioè **f(b)-f(a)=mb-ma**, da cui: **(*) f(b)-mb=f(a)-ma**. Cosa ci dice questa?....
Si, *bene*, che la funzione **g(x)=f(x)-mx** assume valori uguali agli estremi di **[a,b]**; inoltre…*Giusto*, essa è **continua** in **[a,b]**, **derivabile** in **]a,b[** perché differenza di funzioni continue e derivabili nei rispettivi intervalli. *Allora*…..per il teorema di **Rolle** $\exists\, \mathbf{x_0} \in$ **]a,b[** per il quale **g'**$(\mathbf{x_0})$**=0**. Conseguentemente **f'**$(\mathbf{x_0})$**-m=0**, da cui **f'**$(\mathbf{x_0})$**=m** e, per la (*):

$$\mathbf{f'(x_0)=}\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ .$$

Il risultato ottenuto è quello che si chiama **teorema di Lagrange**, di cui si presenta l'enunciato.

Concludo dicendo: ben vengano gli scacchi a scuola. Ma non sarebbe di gran lunga più efficace modificare l'approccio ai vari argomenti così che risulti più concreto e coinvolgente per gli allievi e usare le ore curricolari per abituare i giovani a escogitare sistematicamente strategie risolutive?

Giarre 11/09/2016

Alfio Grasso
grassoalfino@yahoo.it