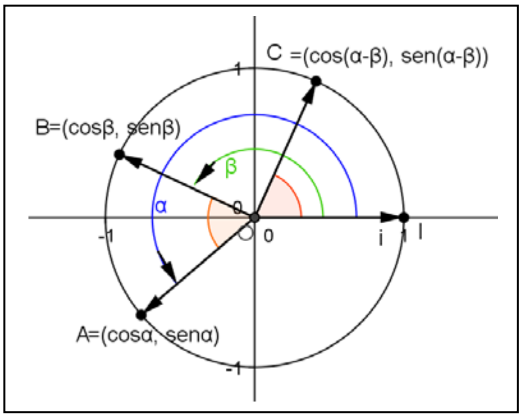
Goniometria e vettori

I programmi ministeriali prevedono, a mio avviso avvedutamente, l'introduzione della trigonometria sino dal biennio di alcune scuole superiori. Ciò a motivo del fatto che in esse la fisica viene studiata dal primo anno e quindi è utile a esempio nel trattare il lavoro di una forza costante come prodotto scalare di due vettori; inoltre, nel prosieguo degli studi, è utilissimo il loro prodotto vettoriale: momento di una forza, forza magnetica, etc.
Quando negli anni successivi si introduce la goniometria, ritengo sia importante l'utilizzo dei vettori perché sono uno strumento notevole sia per la matematica sia per la fisica e permettono un'esposizione semplice e concisa.
Propongo come esempio le dimostrazioni del coseno e del seno della differenza tra le misure di due angoli mediante i vettori. Esse risultano semplici e brevi – al contrario di quelle tradizionali **-** soprattutto se dal primo anno si è introdotta la geometria mediante lo studio delle trasformazioni, tra le quali la traslazione conduce naturalmente al concetto di vettore.
Prospetto poi il "teorema della corda spezzata", per il quale ho preso lo spunto da Boyer *Storia della matematica*, che i matematici arabi attribuiscono ad Archimede; esso conduce alla formula:

$$\mathbf{sen(\alpha\text{-}\beta)=sen\alpha cos\beta\text{-}cos\alpha sen\beta}.$$

La dimostrazione del teorema è articolata nella parte di geometria ed è per ciò un'ottima palestra per coinvolgere i giovani nel riprendere diverse utili proprietà geometriche. Inoltre è un importante strumento che consente loro di capire come i matematici ellenici usavano la geometria per sopperire alla goniometria e trigonometria che saranno introdotte dopo.

Coseno (α-β)



Consideriamo la circonferenza **c** di centro **O** e raggio **OI**, con **I=(1,0)**. Scelti due qualsiasi punti **A** e **B** su **c**, vengono individuati due angoli al centro, $I\hat{O}A$ e $I\hat{O}B$, le cui misure indichiamo rispettivamente con α e β.
Nella rotazione **ρ** del piano, di centro **O** e che muta **B** in **A**, il punto **I** si trasforma nel punto **C** di **c** tale che $I\hat{O}C$ isometrico a $B\hat{O}A$ e la loro ampiezza è α-β.
Vogliamo determinare cos(α-β) essendo noti cosα, senα, cosβ, senβ.
Poiché è coinvolto il coseno della misura α-β dell'angolo $B\hat{O}A$ utilizziamo il prodotto scalare dei versori $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OA}$ che lo contiene; essendo per costruzione $I\hat{O}C$ isometrico a $B\hat{O}A$, tale prodotto scalare è uguale al prodotto scalare fra i versori $\overrightarrow{OI}$ e $\overrightarrow{OC}$:

$$(*)\ \underline{\overrightarrow{OI}\times\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OA}}.$$

Scritti allora i versori mediante la loro decomposizione lungo gli assi:

$\overrightarrow{OI}$ =1**i**+0**j**,

$\overrightarrow{OB}$ =cosβ**i**+senβ**j**,

$\overrightarrow{OA}$= cosα**i** +senα**j**,

$\overrightarrow{OC}$ =cos(α-β)**i**+sen(α-β)**j**, la (*) diventa:

$$(1\hat{\imath}+0\hat{\jmath})\times[\cos(\alpha-\beta)\hat{\imath}+\mathrm{sen}(\alpha-\beta)\mathbf{j}]=(\cos\beta\,\hat{\imath}+\mathrm{sen}\beta\,\hat{\jmath})\times(\cos\alpha\,\hat{\imath}+\mathrm{sen}\alpha\,\hat{\jmath}).$$

Questa, eseguendo i prodotti scalari, dà:

$\hat{\imath}\times[\cos(\alpha-\beta)\hat{\imath})+\hat{\imath}\times(\mathrm{sen}(\alpha-\beta)\hat{\imath}]+\mathbf{0}\times[\cos(\alpha-\beta)\hat{\imath}+\mathbf{0}\times\mathrm{sen}(\alpha-\beta)\mathbf{j}]=\cos\beta\hat{\imath}\times\cos\alpha\hat{\imath}+\cos\beta\hat{\imath}\times\mathrm{sen}\alpha\hat{\jmath}+$ $\underline{\mathrm{sen}\beta\hat{\jmath}}\times\underline{{}^*\cos\alpha\,\hat{\imath}+\mathrm{sen}\beta\hat{\jmath}}\times\underline{\mathrm{sen}\alpha\,\hat{\jmath}.}$

Da cui infine, poiché $\hat{\imath}\times\hat{\imath}=1$, $\hat{\imath}\times\hat{\jmath}=\hat{\jmath}\times\hat{\imath}=0$, $\hat{\jmath}\times\hat{\jmath}=1$, si ha:

(**) **<u>cos(α-β)= cosαcosβ-senαsenβ</u>**.

Poiché quella ottenuta è un'identità, cioè vale per ogni α e per ogni β reali, è vera se al posto di β si sostituisce –β. Eseguita la sostituzione, si ottiene:

cos[α-(-β)]=cosαcos-(β)-senαsen(-β) che, tenendo conto le relazioni fra seno e coseno di archi opposti, cioè cos(-α)=cosα e sen(-α)= -senα, diventa:

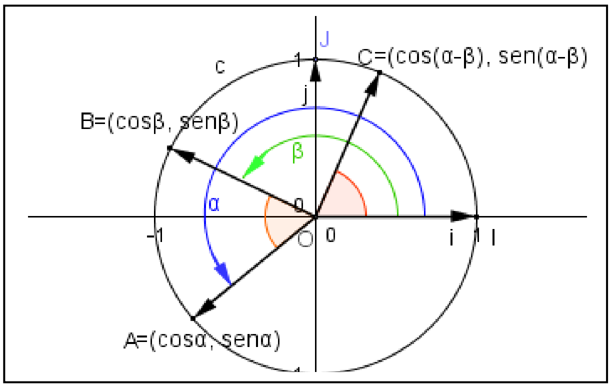
(***) **<u>cos(α+β)= cosαcosβ+senαsenβ</u>**.

N.B.

È bene osservare esplicitamente che, per il coseno della differenza (somma) delle misure di due angoli, non vale la cosiddetta *proprietà di linearità*, cioè cos(α+β) $\neq$ cosα+cosβ. Questa disuguaglianza è da **rilevare** perché i giovani tendono ad ammetterla automaticamente.

Sen(α-β).

Utilizziamo la figura precedente e le sue notazioni. Allora **C**=[cos(α-β)**î**+sen(α-β)**ĵ**], **A**=(cosα**î**+senα**ĵ**), **B**=(cosβ**î**+senβ**ĵ**).



Poiché vogliamo determinare **sen(α-β)** ci serviamo del prodotto vettoriale che lo contiene.

Calcoliamo i moduli dei prodotti vettoriali $\hat{\imath}\wedge\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OA}$. I moduli sono uguali poiché i vettori considerati sono versori – quindi hanno modulo 1 – e gli angoli individuati possiedono la stessa ampiezza α-β:

- $|\hat{\imath}\wedge\overrightarrow{OC}|$=sen(α-β);
- $|\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OA}|$ =|(cosβ**î**+senβ**ĵ**)∧(cosα**î**+senα**ĵ**)|.

In questa, per la proprietà distributiva del prodotto vettoriale rispetto alla somma abbiamo:

cosβ**î**∧cosα**î**+cosβ**î**∧senα**ĵ**+senβ**ĵ**∧cosα**î**+senβ**ĵ**∧senα**ĵ.**

Da quest'ultima, poiché **î**∧**î**=**ĵ**∧**ĵ**=0, **î**∧**ĵ**=1 e **ĵ**∧**î**=-1, otteniamo: senαcosβ-cosαsenβ.

In definitiva:

<u>sen(α-β)=senαcosβ-cosαsenβ</u>.

Analogamente a quanto detto per ottenere cos(α+β), per conseguire sen(α+β) basta tenere conto che l'uguaglianza precedente è un'identità e quindi vale per ogni α e per ogni β; vale allora se sostituiamo -β a β: sen[α-(-β)]=senαcos(-β)-cosαsen(-β).

Questa, tenendo conto le relazioni fra seno e coseno di archi opposti, cioè cos(-β)=cosβ e sen(-β)= -senβ, diventa:

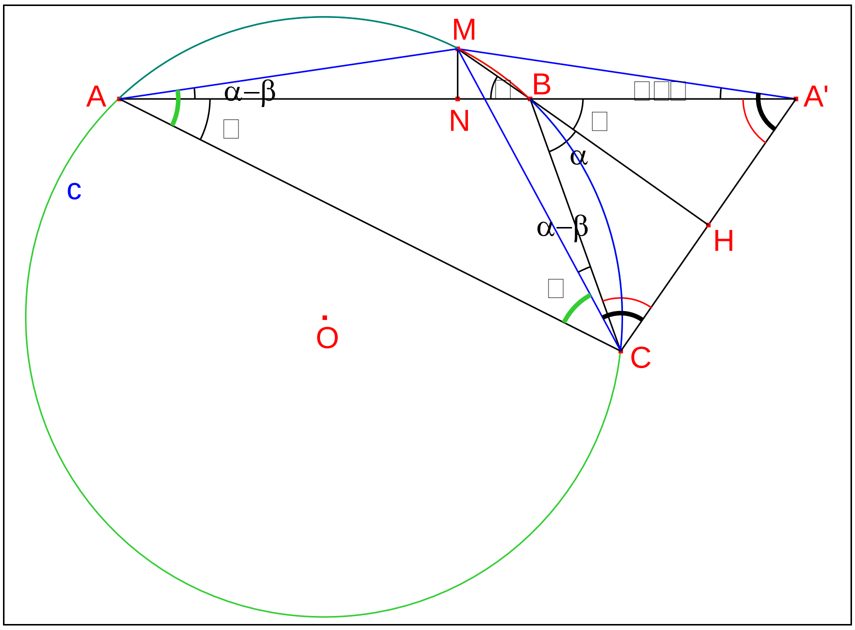
<u>sen(α+β)=senαcosβ+cosαsenβ</u>.

Come prima facciamo notare che non vale la proprietà di linearità.

Teorema della corda spezzata

<u>Dati su una circonferenza tre punti **A**, **B** e **C** tali che **AB**>**BC** (figura), indichiamo con **s** la spezzata **AB+BC**. Detto **M** il punto medio dell'arco **ABC** e denotata con **N** la proiezione</u>

ortogonale di **M** sulla corda maggiore **AB**, **N** è il punto medio di **AB+BC**, cioè **AN=(AB+BC)/2**.



Innanzitutto, poiché $\widehat{AM}=\widehat{MC}$, $\overline{AM}=\overline{MC}$ e $\mathbf{C\hat{A}M}$ ed $\mathbf{M\hat{C}A}$ hanno la stessa ampiezza, sia α. Chiamiamo poi β l'ampiezza dell'angolo che insiste sull'arco $\widehat{CB}$. Inoltre l'angolo $\mathbf{M\hat{B}A}$ possiede anch'esso misura α perché angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco $\widehat{MA}$ dell'angolo $\mathbf{M\hat{C}A}$. Costruiamo ora il simmetrico **A'** di **A** rispetto a **MN**: $\overline{A'M}=\overline{AM}$ perché simmetrici e $\overline{MC}=\overline{A'M}$ per transitività, quindi il triangolo **CA'M** è isoscele sulla base **CA'** e così gli angoli $\mathbf{M\hat{A}'C}$ e $\mathbf{A'\hat{C}M}$ hanno stessa ampiezza γ. In aggiunta gli angoli $\mathbf{M\hat{C}B}$ e $\mathbf{M\hat{A}B}$ presentano stessa misura α-β; infatti, $\mathbf{M\hat{C}B}$ insiste sullo stesso arco di $\mathbf{B\hat{A}M}$ ed $\mathbf{M\hat{A}B}$ è simmetrico di questo rispetto a **MN**. Allora le ampiezze degli angoli $\mathbf{M\hat{A}'C=A'\hat{C}B}$ sono uguali perché differenze di angoli di ampiezze uguali e il triangolo **CA'B** è isoscele su **CA'**, quindi $\overline{A'B}=\overline{CB}$ e $\overline{AA'}=\overline{AB}+\overline{BA'}=\overline{AB}+\overline{BC}$.
In conclusione $\overline{AN}=\overline{AA'}/2=(\overline{AB}+\overline{BC})/2$.

Osserviamo ora che, essendo i triangoli **CA'M** e **CA'B** isosceli sulla base **CA'**, detto **H** il punto medio di **CA'**, la perpendicolare per **H** a **CA'** è asse di simmetria dei triangoli **CA'M** e **CA'B**, quindi **H**, **M** e **B** sono allineati e gli angoli $\mathbf{C\hat{B}H}$ e $\mathbf{H\hat{B}A'}$ hanno stessa ampiezza, che è α, perché $\mathbf{H\hat{B}A'}$ ed $\mathbf{M\hat{B}A}$ sono simmetrici rispetto a **B**.
Dal teorema della corda e da quelli sui triangoli rettangoli:

1) $\overline{MC}=\overline{AM}=\mathbf{2rsen}\alpha$, 2) $\overline{BC}=\mathbf{2rsen}\beta$, 3) $\overline{MB}=\mathbf{2rsen}(\alpha\text{-}\beta)$, 4) $\overline{MB}=\overline{MH}-\overline{BH}$

5) $\overline{MH}=\overline{MC}\cos\beta=2\mathbf{r}\,\mathbf{sen}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{cos}\boldsymbol{\beta}$.

Da queste otteniamo:

2rsen(α-β)=**2rsen**α**cos**β-**2rcos**α**sen**β,

e infine, dividendo ambo i membri per **2r**:

sen(*α*-*β*)=sen*α*cos*β*-cos*α*sen*β*.

Giarre 09/01/2015 Alfio Grasso

grassoalfino@yahoo.it