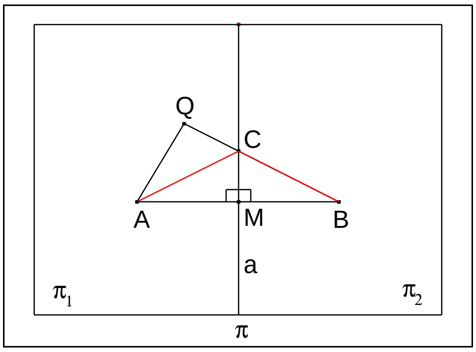
Simmetrie assiali e problemi di minimo o di massimo

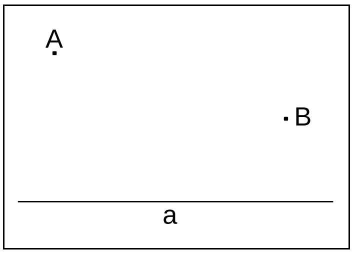
La rilevanza della simmetria, nel senso moderno d'invarianza rispetto a un gruppo di trasformazioni, nello studio dei fenomeni naturali è accertata e accettata da tempo.
In questo piccolo lavoro prospetto l'uso della simmetria assiale nella risoluzione di problemi di minimo o massimo, che si possono presentare al primo o al secondo anno di scuola media superiore.
Segnalo innanzitutto che la simmetria assiale riveste un ruolo significativo sia sotto l'aspetto euristico sia sotto quello dimostrativo.
Presento ora due interessanti problemi, uno di minimo, l'altro di massimo, che sono capaci di stimolare l'interesse degli allievi, anche perché possono presentarsi come problemi del mondo reale.
Osservazione
È bene, per una migliore comprensione delle argomentazioni addotte nelle dimostrazioni, far notare che la simmetria assiale trasforma un tragitto spezzato in uno rettilineo che è più semplice confrontare con altri percorsi, rivisitando l'asse di un segmento;
Riproponiamo la dimostrazione della proprietà:
Se un punto **Q** *non appartiene all'asse di un segmento*, allora *non è equidistante dai suoi estremi*: <u>precisamente ha distanza minore dall'estremo che si trova, rispetto all'asse, nello stesso semipiano cui appartiene il punto **Q**</u> (di questa proprietà ci si può servire nel trattare la bisettrice di un angolo come asse di simmetria dei lati dell'angolo).
Siano **AB** un segmento di asse **a**, **Q** un punto (figura) che sta nel semipiano π_1 di π individuato da **a**, cui appartiene **A**. L'occhio suggerisce che $\overline{QA} < \overline{QB}$; riproponiamo la dimostrazione.



Poiché **Q** e **B** appartengono ai semipiani aperti opposti π_1 e π_2 determinati da **a**, il segmento **QB** interseca l'asse in **C**. Questo è punto unito (perché?) nella simmetria di asse **a**, s_a, nella quale ad **A** corrisponde **B**, quindi: $\overline{CA} = \overline{CB}$. Dobbiamo confrontare $\overline{QA}$ e $\overline{QB} = \overline{QC} + \overline{CB}$. Per la proprietà triangolare $\overline{QA} < \overline{QC} + \overline{CA}$ che è una spezzata, ma $\overline{CA} = \overline{CB}$ e quindi possiamo scrivere, $\overline{QB} = \overline{QC} + \overline{CA}$; in conclusione $\overline{QA} < \overline{QB}$.

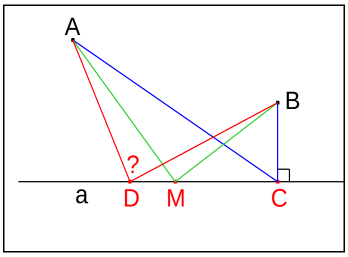
1. **Problema di Erone** (matematico e ingegnere di Alessandria d'Egitto del I-II secolo d.C.).
   Esso è stato proposto agli ultimi esami di stato ma, poiché la geometria è colpevolmente trascurata - per usare un eufemismo - è stato spesso ignorato o se n'è data una soluzione analitica, che è come usare una ruspa per smuovere un fuscello.
   Obiettivo: <u>Dati una retta e due punti generici appartenenti a uno stesso semipiano aperto rispetto a essa, trovare il percorso più breve che li congiunge dovendo toccare la retta</u>.
   Prerequisiti: *Simmetria assiale, proprietà di partizione, proprietà triangolare*.

Si può presentare la situazione mediante il seguente problema tratto dal mondo reale.
In una zona pianeggiante c'è un lungo tratto rettilineo di un'autostrada **a**. Si deve costruire un casello che serva due cittadine **A** e **B**, che sono dalla stessa parte rispetto **a**.



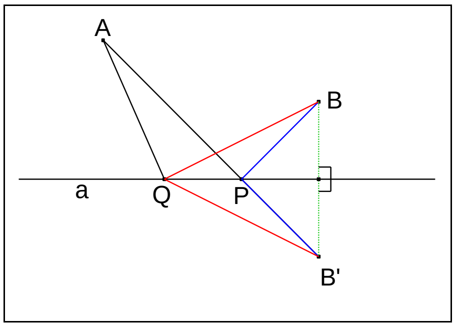
In quale punto **P** di **a** deve essere realizzato il casello affinché la somma dei tragitti rettilinei **AP+PB** sia la più breve, quindi la più economica? Schematizziamo come in figura la situazione e sollecitiamo i giovani ad suggerire qualche possibile soluzione. I tragitti più gettonati sono:

- Tracciamo per **B** (perché rispetto ad **A** è più vicino ad **a**) il segmento di perpendicolare **AC** ad **a** e poi il segmento **CA**.
- (Confuso) Il punto **P** di **a** cercato è il punto medio **M** fra **A** e **B** su **a**.

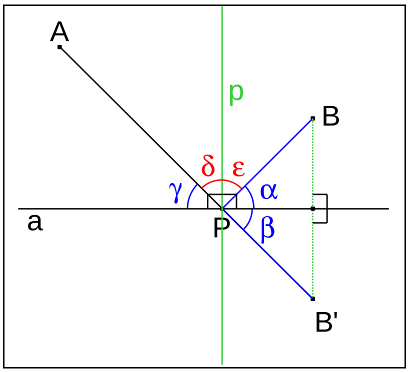


Dopo avere preso un altro punto su **a**, sia **D**, e tracciati i segmenti **AD** e **DB**, chiediamo (inutilmente) la motivazione della loro scelta; facciamo notare che non abbiamo strumenti razionali con cui confrontare le lunghezze delle diverse spezzate che rappresentano i percorsi indicati.

Suggeriamo allora di considerare un punto **Q** qualsiasi di **a** e di tracciare i segmenti **AQ** e **QB** (figura sotto) e di chiedersi, come spesso è utile, se c'è qualche simmetria che ci può venire in soccorso.
Giovanni allora dice: per l'osservazione precedente c'è la simmetria rispetto ad **a**, $\mathbf{s_a}$, che permette di trasformare una spezzata in un segmento di uguale lunghezza più facile da confrontare con le spezzate: in particolare costruiamo il simmetrico **B'** di **B** nella simmetria rispetto ad **a** e tracciamo il segmento **AB'**, che interseca **a** nel punto **P** e **PB** simmetrico di **PB'** in $\mathbf{s_a}$. Da ciò (*) $\overline{PB'} = \overline{PB}$ e quindi $\overline{AB'} = \overline{AP} + \overline{PB'}$ diventa $\overline{AB'} = \overline{AP} + \overline{PB}$.



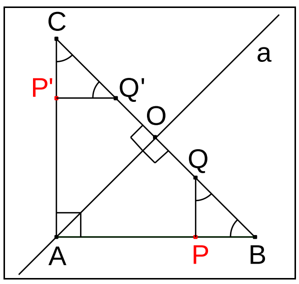
Prima di andare avanti chiediamo perché il segmento **AB'** interseca **a** nel punto **P**; ottenuta la risposta corretta proseguiamo.
Prendiamo ora un punto **Q** diverso da **P** su **a** e ricordiamo che dobbiamo confrontare $\overline{AP} + \overline{PB}$ con $\overline{AQ} + \overline{QB}$. Qualche suggerimento?
Elisa propone: poiché $\overline{AB'} = \overline{AP} + \overline{PB}$, applichiamo la proprietà triangolare ad **AQB'**: abbiamo $\overline{AB'} < \overline{AQ} + \overline{QB'}$ e, poiché (**) $\overline{QB'} = \overline{QB}$ perché simmetrici in $\mathbf{s_a}$, $\overline{AB'} < \overline{AQ} + \overline{QB}$. Allora da $\overline{AB'} = \overline{AP} + \overline{PB}$ segue che $\overline{AP} + \overline{PB} < \overline{AQ} + \overline{QB}$.
In conclusione: <u>Il percorso minimo da **A** a **B**, dovendo toccare **a** è determinato dal punto **P** intersezione dell'asse **a** con il segmento **AB'**, con **B'** simmetrico di **B** rispetto ad **a**.</u>
È allora nel punto **P** dell'autostrada che si deve costruire il casello.



È opportuno fare notare che la risoluzione del problema descrive il comportamento della luce quando si riflette.
Infatti (figura), sia **a** una superficie riflettente; consideriamo un raggio luminoso emesso da **A** e un osservatore in **B**.
α e **β** hanno la stessa ampiezza perché simmetrici rispetto ad **a** e così pure, **β e γ** in quanto opposti al vertice: dunque **α** e **γ** hanno la stessa ampiezza. Indicata allora con **p** la perpendicolare ad **a** per **P**, **α** e **γ** presentano la stessa ampiezza perché simmetrici rispetto a **p**: **δ** ed **ε** hanno anch'essi la stessa ampiezza perché simmetrici rispetto a **P**. Ma essi rappresentano rispettivamente *l'angolo d'incidenza* e *quello di riflessione* di un raggio luminoso che da **A** va a **B** riflettendosi su **a**:
la legge di riflessione della luce è dunque una legge di simmetria.

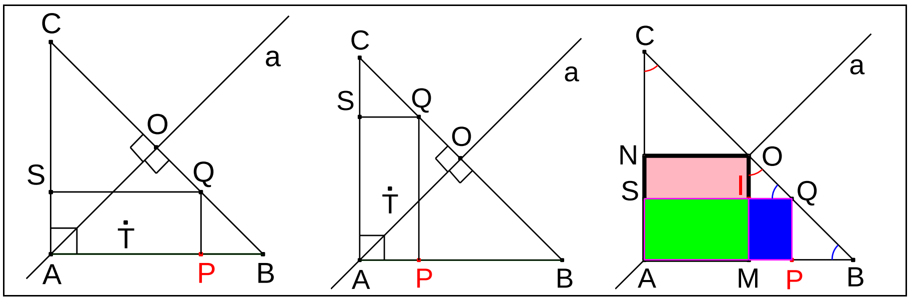
A questo punto è interessante porre la domanda: se consideriamo il simmetrico di **A** rispetto ad **a** invece del simmetrico di **B** che succede? Fatelo come esercizio tenendo conto di opportuni angoli di vertice **P**.

2.
Obiettivo: <u>Dato un triangolo rettangolo e isoscele determinare il rettangolo di area massima fra quelli inscritti nel triangolo e con un angolo retto coincidente con quello del triangolo</u>.
Prerequisiti: <u>simmetria assiale e centrale, punto medio, triangolo isoscele, rettangolo, perimetro, area</u>.
Anche questo problema può essere esposto prendendo le mosse da una situazione concreta.
Un imprenditore ha un terreno a forma di triangolo rettangolo e isoscele, contornato da due strade lungo i cateti. Vuole costruire un capannone rettangolare che gli serva da deposito in modo che abbia la maggiore area possibile e i cui accessi siano lungo i cateti.



Poiché il triangolo **ABC** è isoscele possiede….
Alice suggerisce: un asse di simmetria nella retta **a** passante per **A** e per il punto medio **O** di **CB**.
Come possiamo costruire uno dei nostri depositi (rettangoli)?
Matteo propone di considerare un punto **P** su **AB** e costruire il segmento **PQ** per **P** perpendicolare ad **AB**. Il triangolo **PBQ** è isoscele sulla base **BQ**, essendo $P\hat{Q}B$ corrispondente di $\hat{C}$ che ha la stessa ampiezza di $\hat{B}$; allora il triangolo **PBQ**, oltre a essere rettangolo è anche isoscele sulla base **QB**, e $\overline{PQ} = \overline{PB}$: quindi $\overline{AP} + \overline{PQ} = \overline{AP} + \overline{PB}$ che è il semiperimetro.

Questo risultato ci assicura che il perimetro rettangolo da costruire, sia **R**, è….
Tiziana afferma **p=2 (** $\overline{AP}+\overline{PB}$ **)**.
Come puoi determinarlo?
Prosegue Tiziana: costruiamo il simmetrico **S** di **P** rispetto al punto medio **T** di **AQ**: otteniamo così il rettangolo **APQS** che è uno di quelli richiesti.
Al variare di **P** (figure sotto) si modifica l'area della superficie di **R**, che diminuisce se **P** si avvicina ad **A** o a **B**, mentre aumenta se **P** è prossimo al punto medio **M** di **AB** e quindi se **Q** è vicino a **O** ed **S** a **N** punto medio di **AC**.



Qualche idea?
Damiano avanza questa congettura: la simmetria della situazione suggerisce di confrontare l'area di **APQS** con quella di **AMON** che risulta un quadrato, poiché è un rettangolo con due lati consecutivi **AM** e **AN** isometrici poiché simmetrici rispetto ad **a**.
Cosa proponete?
Patrizia osserva: se chiamiamo **I** l'intersezione tra **SQ** ed **MO**, il rettangolo **APQS** e il quadrato **AMON** hanno in comune il rettangolo **SION**; è sufficiente confrontare **SION** col rettangolo **MPQI** e provare che **SION** presenta area maggiore di **MPQI**.
Come?
Allora Chiara dice: **IQO** è isoscele sulla base **QO** poiché i suoi angoli in $\hat{O}$ e $\hat{Q}$ sono rispettivamente isometrici perché corrispondenti degli angoli $\hat{C}$ e $\hat{B}$; quindi $\overline{IO}=\overline{IQ}$ e $\overline{OM}>\overline{IM}$: allora **SION** possiede area maggiore di **MPQI**.
In forza dell'osservazione di Patrizia il quadrato **AMON** ha area maggiore del rettangolo **APQS**.
Per la simmetria prima evidenziata potremmo usare le stesse argomentazioni prendendo il simmetrico **P**' di **P** su **AC**.
Il risultato ottenuto ci consente di dare una formulazione diversa al problema:
<u>Fra i rettangoli di uguale perimetro, quello di area massima è il quadrato</u>.

Dato un segmento che rappresenta il perimetro di un rettangolo, provate a suggerire una costruzione che tenendo costante il perimetro ne faccia variare l'area e porti alla formulazione precedente. Vi suggerisco di farlo in gruppi.

Osserviamo infine che i due problemi di minimo e massimo affrontati sono legati alla simmetria. A questa, come abbiamo già visto e come vedremo in seguito, sono spesso riconducibili tali tipologie di problemi.

Giarre 14/12/2014

Alfio Grasso
grassoalfino@yahoo.it

2 Rettangoli di area massima.

OBIETTIVI

- **Trovare il rettangolo di area massima fra quelli inscritti in un triangolo rettangolo e con un vertice coincidente con l'angolo retto.**
- **Determinare il rettangolo di area massima fra quelli inscritti in un triangolo e con un lato su uno dei lati del triangolo.**

<u>Prerequisiti.</u> *Piccolo teorema di Talete applicato ad un triangolo, simmetria assiale, simmetria centrale, equivalenza, area.*

Svolgimento

Sia **ABC** un triangolo rettangolo in **A**. Prendiamo un punto **P** su **BC** e determiniamo i segmenti **PD** e **PE** rispettivamente perpendicolari ad **AB** e **AC**: il rettangolo **AEPD** ha un vertice in **A**.

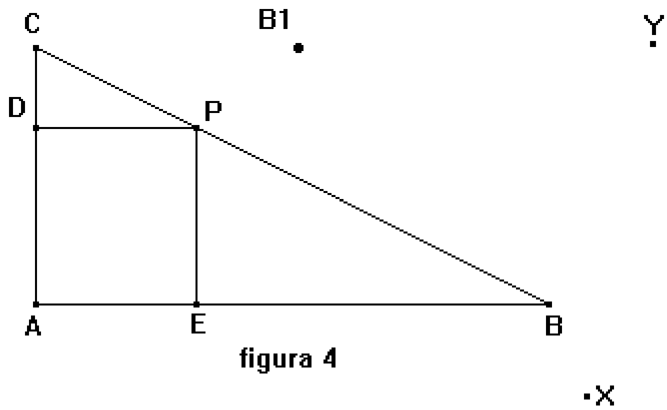


figura 4

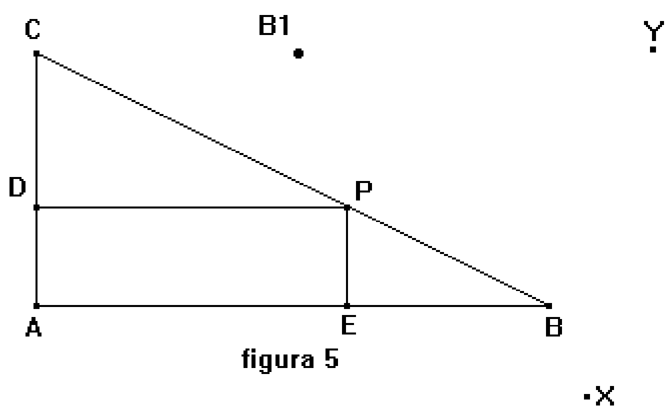
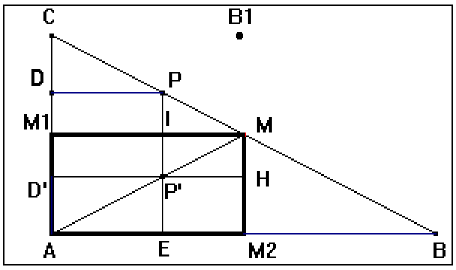


figura 5

Muovendo ripetutamente **P** su **BC** (figure) si modifica l'area del rettangolo **AEPD** perché variano le sue dimensioni e i giovani intuiscono che se **P** si avvicina a **B** o a **C** uno dei lati, e quindi l'area, tende a diventare zero, mentre essa cresce via via che **P** si approssima ad una posizione intermedia fra **B** e **C**. Questo fa congetturare che il rettangolo cercato è quello in cui il punto **P** coincide col punto medio di **BC**. Possiamo corroborare quest'intuizione modificando la posizione di **A**, **B** o **C**, così da cambiare le dimensioni del triangolo e muoviamo ancora **P**; l'osservazione precedente è convalidata. Cerchiamo di provare quanto intuito invitando i giovani a partecipare costantemente all'individuazione del percorso dimostrativo.



Coinvolgiamoli innanzi tutto nel dedurre che il rettangolo "incriminato" ha come vertici, oltre ad **A** ed **M**, $\mathbf{M_1}$ ed $\mathbf{M_2}$ punti medi ordinatamente di **AC** ed **AB**.

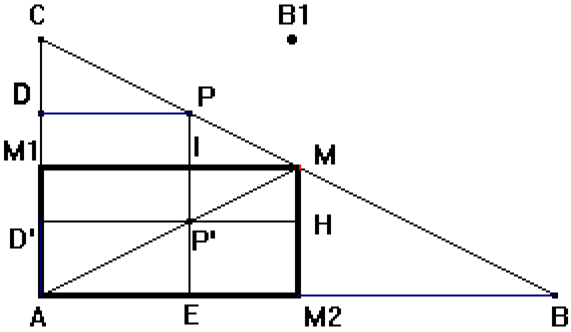
Qualche idea?......*Richiamate alla mente l'ipotesi che l'angolo Â è retto e che* MM_1 *è perpendicolare ad* ***AC****.*

Damiano suggerisce: poiché $\mathbf{MM_1}$ è perpendicolare ad **AC** risulta parallelo ad **AB**, utilizziamo il teorema: <u>la parallela a un lato di un triangolo condotta per il punto medio di un altro lato interseca il terzo lato nel suo punto medio</u>; dunque $\mathbf{M_1}$ è il punto medio di **AC**.

Allora a retta MM_1 *che cosa è del segmento AC*?

Tiziana dice che ne è l'asse **a**.

Quindi nella simmetria rispetto ad **a s_a**, **CM** si trasforma in….
AM
E per M_2?
di utilizzare un ragionamento analogo, dato che **MM_2** risulta parallelo ad **AD**.



, per la nota proprietà della parallela ad un lato di un triangolo per il punto medio di un altro lato. Per rendere più rapida la costruzione del nostro rettangolo, muoviamo il punto B_1 – che attiva un punto booleano - verso sinistra (figura 6). Facciamo osservare che la retta M_1M, perpendicolare ad AC essendo il triangolo rettangolo in A, è asse del segmento AC e dunque il segmento AM è simmetrico di CM rispetto a M_1M (cercare le simmetrie è spesso utile).
Proseguiamo scegliendo inizialmente P sul segmento MC. Chiamiamo I il punto in cui il segmento PE interseca M_1M; poiché i rettangoli AM_2MM_1 ed AEPD hanno in comune il rettangolo $AEIM_1$, basta dimostrare che EM_2MI è prevalente rispetto a M_1IPD: per confrontarli più facilmente utilizziamo la simmetria prima osservata. Costruiamo D' e P' simmetrici rispettivamente di D e P rispetto a MM_2 e il punto H intersezione di MM_2 con la retta D'P'; abbiamo che P' sta su AM simmetrico di CM rispetto a MM_1, e osserviamo che è più semplice confrontare l'area di D'P'IM_1- uguale a quella di M_1IPD perché rettangoli simmetrici - con quella di EM_2MI.

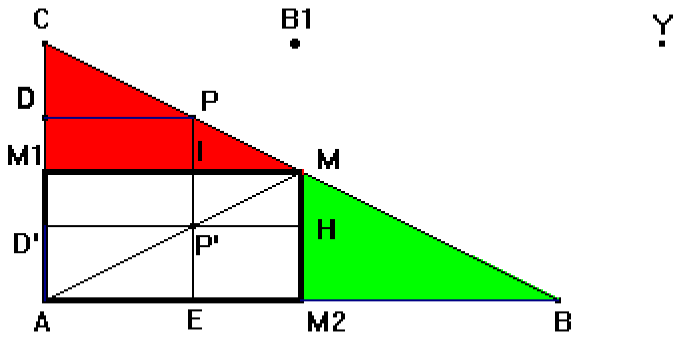


figura 7

Infatti, i triangoli AM_2M e AMM_1 sono equivalenti; essi sono formati il primo dai triangoli P'HM ed AEP' e dal rettangolo EM_2HP', il secondo dai triangoli P'MI e AP'D' – equivalenti nell'ordine a P'HM ed AEP' - e dal rettangolo D'P'IM_1 che ha, per differenza la stessa superficie di EM_2 HP', e risulta con ciò suvvalente rispetto al rettangolo EM_2MI.
Analoghe considerazioni se P appartiene al segmento MB sfruttando la simmetria rispetto alla retta MM_2.
E' importante infine fare scoprire quanto vale l'area del rettangolo trovato. Possiamo rendere "visivamente" chiara la risposta, attivando due simmetrie assiali, muovendo X verso A e Y verso B (figure 7, 7' e 8) e poi far provare che l'area del rettangolo è metà di quella del triangolo dato essendo il triangoli AMM_1 e AM_2M simmetrici di CM_1M e M_2BM ordinatamente rispetto a MM_1 e MM_2.

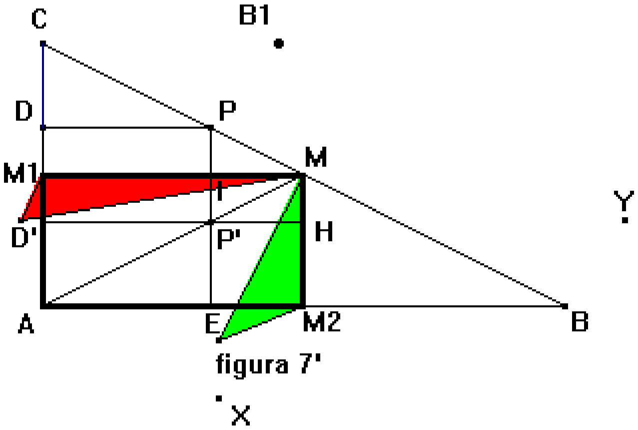


figura 7'

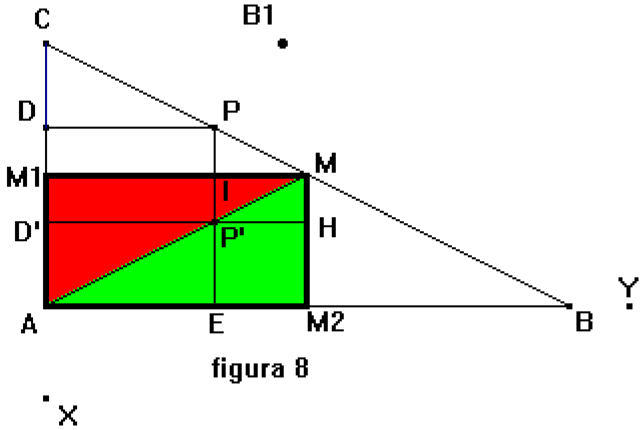


figura 8

Quanto provato ci permette di ottenere un’altra proprietà interessante. Riportiamo X e Y nelle posizioni iniziali. Spostando il punto B_2 verso F, viene mostrata una nuova situazione (figura 9). Muovendo P su BC si modificano le dimensioni, e quindi l’area, del rettangolo PP_1E_1E che ha un lato sul lato FB del triangolo FBC; il risultato prima conseguito consente di concludere che il rettangolo N_1M_2MN, con N_1 e M_2 su FB e con M e N punti medi di BC e CF, è prevalente rispetto ai rettangoli E_1EPP_1 al variare di P su CB.

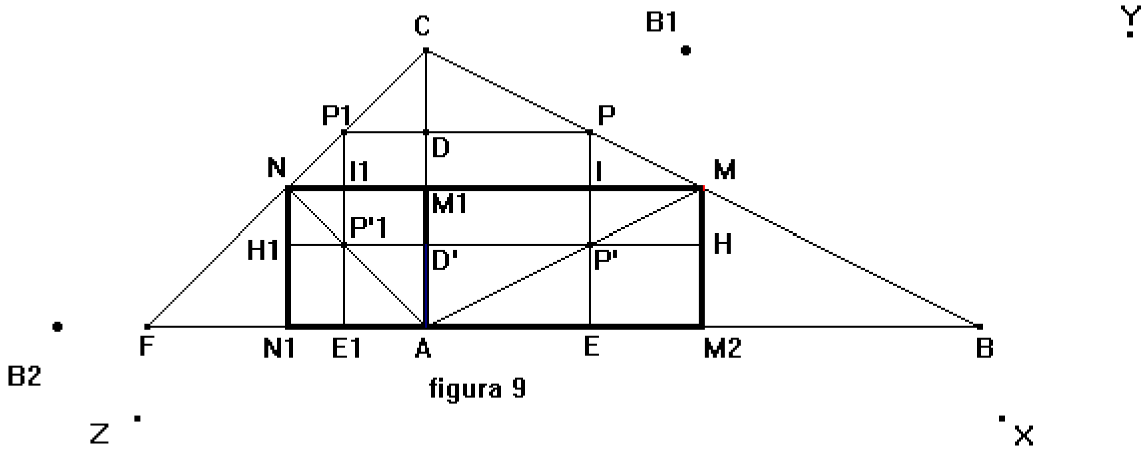


figura 9

Anche in questo caso suggeriamo di confrontare la superficie di N_1M_2MN con quella del triangolo considerato e facilitiamo la ricerca del risultato, come fatto in precedenza, traslatando X e Z verso A e Y verso B, attivando così tre simmetrie assiali (figure 10, 11e 12).

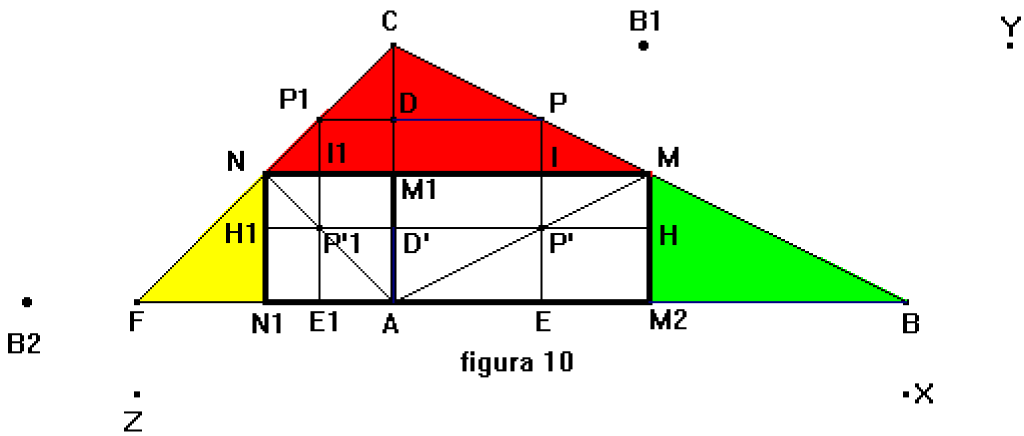


figura 10

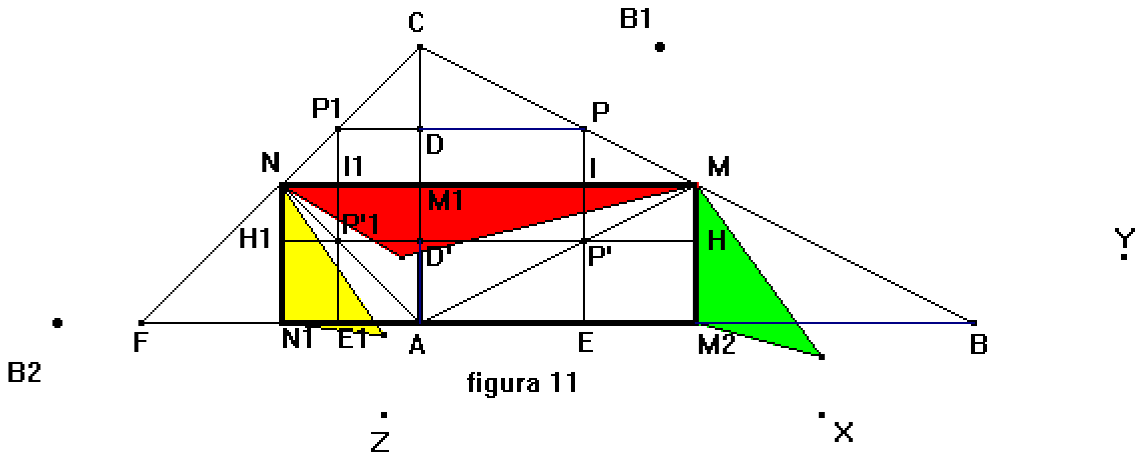


figura 11

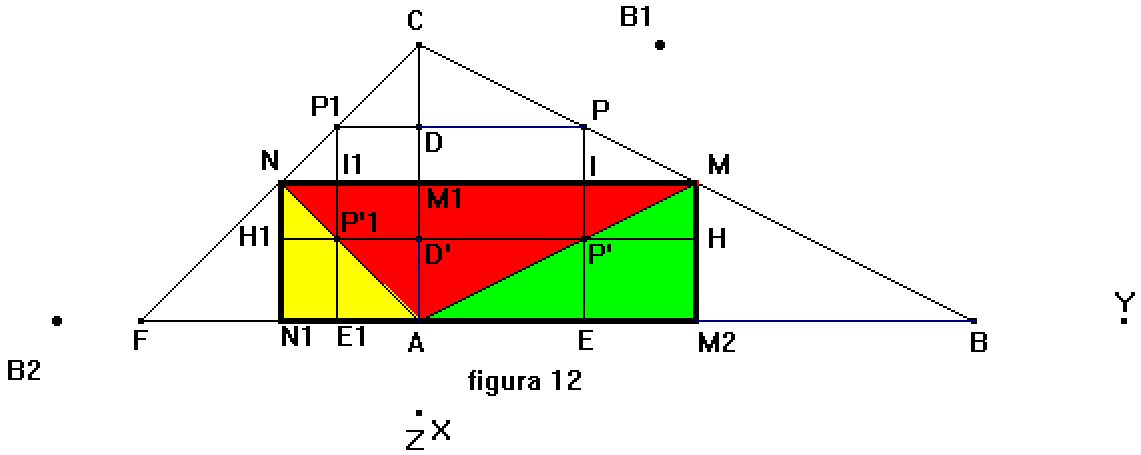


figura 12

L’area del rettangolo N_1M_2MN è metà di quella del triangolo FBC poiché i triangoli N_1AN, AM_2M e NAM sono simmetrici di F N_1M, M_2BM e NMC ordinatamente rispetto a NN_1, MM_2 e NM.
Possiamo allora concludere che:
Fra i rettangoli inscritti in un triangolo e con un lato su uno dei lati del triangolo, quello di area massima ha gli altri vertici nei punti medi degli altri lati: tale area è metà di quella del triangolo.